**Lösningar till MMGF20 Flervariabelanalys 11 06 08 (Fysikprogrammet)**

1. Ritningen är den som ges av gradienten till $f$ i punkten.

   Vi har $\text{grad} f = (z^2 - 1, -2y, 2xz - 2z)$, vilket ger $\text{grad} f(-3,-3,1) = (0,6,-8) = 2(0,3,-4)$.

   Normering ger riktningen $(1/\sqrt{0+9+16})(0,3,-4) = (0,3/5,-4/5)$

   **Svar:** $(0,3/5,-4/5)$

2. Sätt $g(x,y) = 2x^2 + 2y^2/3$. Största och minsta värdet av $f$ längs kurvan $g = 1$ inträffar där $\text{grad} f = (-3/4 + 6x, 1/2 + 2y)$ och $\text{grad} g = (4x, 4y/3)$ är parallella, dvs när

$$0 = \begin{vmatrix} -3/4 + 6x & 1/2 + 2y \\ 4x & 4y/3 \end{vmatrix} = -y + 8xy - 2x - 8xy = -y - 2x.$$

   Vi ska alltså lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} -y - 2x &= 0 \\ 2x^2 + 2y^2/3 &= 1. \end{cases}$$

   Den första ekvationen ger $y = -2x$, som i den andra ger $2x^2 + 8x^2/3 = 1$, dvs $x^2 = 3/14$ och $x = \pm\sqrt{3/14}$. Detta ger de två punkterna $(\sqrt{3/14}, -2\sqrt{3/14})$ och $(-\sqrt{3/14}, 2\sqrt{3/14})$.

   Vi beräknar $f$:s värde i dessa:

$$\begin{aligned} f(\sqrt{3/14}, -2\sqrt{3/14}) &= -\sqrt{3/14} - (3/4)\sqrt{3/14} + 9/14 + 12/14 = \\ &= -(7/4)\sqrt{3/14} + 3/2 = 3/2 - \sqrt{21/32} \\ f(-\sqrt{3/14}, 2\sqrt{3/14}) &= \sqrt{3/14} + (3/4)\sqrt{3/14} + 9/14 + 12/14 = \\ &= (7/4)\sqrt{3/14} + 3/2 = 3/2 + \sqrt{21/32} \end{aligned}$$

   **Svar:** Största värdet är $3/2 + \sqrt{21/32}$, det minsta $3/2 - \sqrt{21/32}$.

3. De stationära punkterna är de där $\text{grad} f = (0,0)$. Det ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} 0 &= 2x - 2xy = 2x(1-y) \\ 0 &= -x^2 + 4y. \end{cases}$$

   Den första ekvationen ger $x = 0$, eller $y = 1$. Första alternativet ger i andra ekvationen $y = 0$. Alternativet $y = 1$ ger istället $x = \pm 2$. Vi har alltså tre stationära punkter: $(0,0)$, $(-2,1)$ och $(2,1)$. Vi bestämmer den kvadratiska formen för $f$ i dessa punkter. Vi har

| | $(0,0)$ | $(-2,1)$ | $(2,1)$ |
|---|---|---|---|
| $f''_{xx} = 2 - 2y$ | 2 | 0 | 0 |
| $f''_{xy} = -2x$ | 0 | 4 | -4 |
| $f''_{yy} = 4$ | 4 | 4 | 4 |
| $Q$ | $h^2 + 2k^2$ | $4hk + 2k^2$ | $-4hk + 2k^2$ |

   Här är $h^2 + 2k^2$ positivt definit för den är summan av två kvadrater. $Q = 4hk + 2k^2$ är indefinit för $Q(1,-1) < 0$, men $Q(1,1) > 0$. Samma sak för $Q = -4hk + 2k^2$, för $Q(1,-1) > 0$, men $Q(1,1) < 0$.

   **Svar:** Lokalt minimum i $(0,0)$ och sadelpunkter i $(\pm 2, 1)$.

4. Vi har att $\mathbf{r}(s,t) = (s, t + st^2, s + t) = (-2,-3,-3)$, ger att $s = -2$ och $t = -1$. Vidare är $\mathbf{r}'_s = (1, t^2, 1)$ och $\mathbf{r}'_t = (0, 1 + 2st, 1)$ och

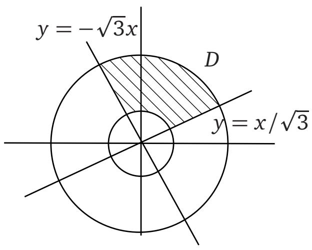
$$\mathbf{r}'_s(-2,-1) \times \mathbf{r}'_t(-2,-1) = \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{matrix} \right\} = (-4,-1,5),$$

som är en normal till tangentplanet liksom $(4, 1, -5)$. Eftersom det går genom $(-2, -3, -3)$ har det därför ekvationen

$$0 = (4, 1, -5) \cdot (x + 2, y + 3, z + 3) = 4x + y - 5z - 4.$$

**Svar:** $4x + y - 5z = 4$.

5. Området $D$ begränsas av två cirklar med medelpunkter i origo och radie 1 respektive 3, samt två räta linjer $y = x/\sqrt{3}$ och $y = -\sqrt{3}x$.




Vi ser att de båda linjerna bildar vinklarna $\pi/6$ och $2\pi/3$ med positiva $x$-axeln, för $\tan(\pi/6) = 1/\sqrt{3}$ och $\tan(2\pi/3) = -\sqrt{3}$. Polära koordinater $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, ger att $1 \leq r \leq 3$ och $\pi/6 \leq t \leq 2\pi/3$. Vi får

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy &= \int_1^3 \Big(\frac{r \cdot r}{1+r^2}\int_{\pi/6}^{2\pi/3} dt\Big)\,dr = \frac{\pi}{2}\int_1^3 \Big(1 - \frac{1}{1+r^2}\Big)\,dr = \\ &= \frac{\pi}{2}\Big[r - \arctan r\Big]_1^3 = \frac{\pi}{2}\Big(2 - \arctan(3) + \arctan(1)\Big)\end{aligned}$$

**Svar:** $\frac{\pi}{2}(2 - \arctan(3) + \pi/4)$.

6. En parametrisering av kurvan ges av $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = ((5/4)\cos t, (5/2)\sin t)$, där $t$ går från 0 till $\pi$. Detta ger

$$\begin{aligned}\int_\gamma y(1+32x)\,dx + 8y^2\,dy &= \int_0^\pi \Big(\frac{5}{2}\cdot\sin t(1+40\cos t)\cdot\Big(-\frac{5}{4}\Big)\sin t + 8\cdot\frac{25}{4}\sin^2 t\cdot\frac{5}{2}\cos t\Big)\,dt = \\ &= \int_0^\pi \Big(-\frac{25}{8}\sin^2 t\Big)\,dt = \{\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos t)\} = \\ &= -\frac{25}{16}\int_0^\pi (1-\cos t)\,dt = -\frac{25\pi}{16}\end{aligned}$$

**Svar:** $-25\pi/16$.