MATEMATIK
Göteborgs universitet

MMGF20 Flervariabelanalys, 7,5 hp, V11

Repetitionsuppgifter

Gränsvärden

1. Avgör gräsnvärdet existerar. Betsäm det i förekommande fall.

$$\text{(a)} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy^2)}{x^2+y^2} \qquad \text{(b)} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2\left(\frac{1}{x^3+y^2} + \ln(x^3+y^2)\right)$$

Kedjeregeln och partiella differentialekvationer

2. Lös differentialekvationen $f'_x - xf'_y = y$ t.ex. genom att göra variabelbytet $u = ax^2 + y$, $v = x$ för lämplig konstant a. Bestäm också den lösning f sådan att $f(x, 0) = x^2 + x^3/3$.

3. Lös differentialekvationen $x^2 f'_x + y^2 f'_y = y$ t.ex. genom variabelbytet $u = 1/x - 1/y$ och $v = 1/y$.

Gradient och riktningsderivata

4. Bestäm $f'_{\mathbf{v}}(1, 2)$ om $\mathbf{v}$ är den riktning som bestäms av vektorn $(-3, 4)$ och $f(x, y) = x^2y - 3xy$

5. I vilken riktning växer funktionen $f(x, y) = x/y$ snabbast i punkten $(-2, 3)$?

6. Betäm riktningsderivatan till $f(x, y) = x^2 - xy^2 + y^3$ i $(1, 1)$ i den riktning som ges av $(3, 4)$.

Tangentlinjer och tangentplan

7. Bestäm en ekvation för tangenlinjen till kurvan $x^2 + xy + 2y^2 = 1$ i punkten $(1, 0)$.

8. Bestäm en ekvation för tangentlinjen till den parametriserade kurvan $\mathbf{r}(t) = (t^2+1, t^3-t)$ i punkten $(5, 6)$ på kurvans spår.

9. Bestäm en parametrisering av tangentlinjen till den parametriserade kurvan $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ i punkten $(1, 1, 1)$ på kurvans spår.

10. Ytorna $x^2 + y^2 - z^2 = 2$ och $x + y - 2e^z = 0$ skär varandra i en kurva genom $(1, 1, 0)$. Bestäm en parametrisering av tangentlinjen till kurvan i denna punkt.

11. Bestäm en ekvation för tangentplantet till ytan $x^3 + 4x^2y + y = z^2$ i punkten $(1, 0, 1)$.

12. Bestäm en ekvation för tangentplanet i punkten $(1, 3/2, 2)$ till ytan som prametriseras av

$$\mathbf{r}(s, t) = (s, s^2 + s\cos(t), s + \sqrt{3}s\sin(t)),\ 0 \le s \le 2, 0 \le t \le 2\pi.$$

Taylorutveckling och lokala extemvärden

13. Bestäm de lokala extrempunkterna till $f(x, y) = xye^{-x-2y}$.

14. Bestäm Taylorpolynomet av ordning två till $f(x, y) = \cos(x)\cos(y)$ kring punkten $(\pi/4, \pi/4)$.

15. Bestäm de stationära punkterna till $f(x, y) = x^2 + 2xy + xy^2$ och avgör deras karaktär.

16. Bestäm de stationära punkterna till $f(x, y) = x^2 - x^2y + 2y^2$ och avgör deras karaktär.

Linjär approximation, inversa och implicita funktionssatsen

17. Visa att sambandet $xe^y + ye^z + ze^x = 1$ definierar z som en differentierbar funktion i en omgivning till $(0, 1, 0)$ Bestäm $z'_x(0, 1)$ och $z'_y(0, 1)$.

18. Visa att sambandet $z(\cos x + \sin y) = 0$ definierar z som en funktion av x och y i närheten av $(0, 0, 0)$, men inte i närheten av $(\pi/4, -\pi/4, 1)$.

Optimering

19. Motivera att funktionen $f(x, y) = 4xy^2 - x^2y^2 - xy^3$ har ett största och ett minsta värde i triangelytan med hörn i $(0, 0)$, $(6, 0)$ och $(0, 6)$. Bestäm dessa värden!

20. Motivera att funktionen $f(x, y) = xy$ antar ett största och ett minsta värde i det området i planet där $2x^2 + y^2 \leq 1$. Bestäm dessa värden.

21. Bestäm eventuella största och minsta värden till funktionen $f(x, y) = xy/(1 + x^2 + y)$ på sektorn $0 \leq y \leq x$.

22. Bestäm eventuella största och minsta värden till funktionen $f(x, y) = (x + y)/(1 + x^2 + y^2)$ på området $0 \leq x, 0 \leq y$.

23. Motivera att $f(x, y) = (x + y)/(1 + x^2 + y^2)$ har ett största och ett minsta värde i området som ges av $1 \leq x + y \leq 2$, $0 \leq x$ och $0 \leq y$. Bestäm också dessa värden.

24. Motivera att funktionen $f(x, y) = xy^2e^{-x^2-y^2}$ har ett största och ett minsta värde i området där $x^2 + y^2 \leq 2$ och $x \leq 0$. Bestäm dessa värden!

25. Bestäm det största värde som $f(x, y) = x^2y$ antar på ellipsen $x^2 + 2y^2 = 1$.

26. Betstäm största och minsta värdet som $f(x, y, z) = x - y^2 + z$ antar på ytan $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1$

27. Bestäm strörsta och minsta värdet som $f(x, y, z) = x - y + z$ antar på skrärningen mellan ytorna $(x - 1)^2 + y^2 = z$ och $x + y + z = 2$

Dubbelintegraler

28. Beräkna $\iint_D y \sin(xy)\, dx\, dy$, där D ges av $1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq \pi/2$.

29. Beräkna
$$\iint_D \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{1 + x^2 + y^2}\, dx\, dy,$$
där D ges av $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ och $0 \leq x \leq y$.

30. Beräkna
$$\iint_D \frac{1 + x}{1 + 2x + y}\, dx\, dy,$$
där D ges av $1 \leq 2x + y \leq 2$, $-2 \leq x - 2y \leq 1/2$.

31. Beräkna
$$\iint_D \sin((2x + y)^2)\, dx\, dy,$$
där D ges av $2x + y \leq 4$, $0 \leq x$, $0 \leq y$.

32. Beräkna $\iint_Y (x - y)\, dS$, där Y är ytan som ges av $z = 4 - x^2 - y^2$, $1 \leq x + y + z$

33. Beräkna arean av ytan som ges av $z = 2 + x^2 + y^2$, $z \leq 6$.

Trippelintegraler

34. Beräkna $\iiint_K x^2\, dx\, dy\, dz$, när K är den begränsade kropp som innesluts av ytorna $z = x^2 + y^2$ och $z = 8 - x^2 - y^2$.

35. Beräkna $\iiint_K z\, dx\, dy\, dz$, där K är den del av enhetsklotet som ges av $|x| \leq y$, $z \geq 0$.

36. Beräkna volymen av den kropp som ges av $4 \geq z \geq x^2 + 4y^2$.

Kurvintegraler och Greens formel

37. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma x^2\, ds$, där γ är kurvan $x^2 + y^2 = 1$

38. Beräkna $\int_\gamma x\, dx + (x + y^2)\, dy$, är γ är kurvan längs enhetscirkeln från $(0,1)$ till $(-1,0)$ i positiv led.

39. Beräkna $\int_\gamma xy\, dx + y^2\, dy$, där γ är kurvan som går från $(0,1)$ till $(1,0)$ kortaste vägen längs enhetscirkeln och därefter fortsätter till $(2,1)$, kortste vägen längs cirkeln med medelpunkt i $(2,0)$ och radie 1.

40. Beräkna $\int_\gamma x^4\, dx + xy\, dy$, där γ är kurvan som i tur och ordning går längs linjestycken mellan punkterna $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ och sedan tillbaka till $(0,0)$.

41. Beräkna $\int_\gamma (3y - e^{\sin x})\, dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1})\, dy$, där γ är cirkeln $x^2 + y^2 = 9$ genomlöpt ett varv medurs.

42. Beräkna det abete som kraftfältet $\mathbf{F} = (y^2 + \sin x, xy)$ uträttar när en partikel rör sig från punkten $(3,2)$ till $(0, 5/2)$ kortaste vägen längs ellipsen $x^2 + 4y^2 = 25$.

43. Beräkna det arbete vektorfältet $\mathbf{F} = (x, zx, yz)$ utför då en partikel rör sig längs kurvan (t, t^2, t^3), och t går från 0 till 1.

44. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{u} = (x + e^y, xy^2 + x\sin(x^2 + 1))$ genom kurvan $y^2 = x$, $1 \leq y \leq 2$ i riktning uppåt(postiv y-koordinat).

Potentialer i planet

45. Bestäm alla funktioner $g(y)$, sådan att $g\mathbf{F}$ blir konsvervativt när $\mathbf{F} = (y \sin x, y \cos x)$. Bestäm alla potentialer till $g\mathbf{F}$, för dessa g.

46. Beräkna

$$\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}\, dx - \frac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}}\, dy$$

för varje kurva γ från $(1,2)$ till $(-1,4)$ i området där $y > |x|$.

47. Vilket eller vilka av följande verkorfält har en potential i området som består av planet utom origo?

    (a) $\mathbf{F} = (x^2 + y, xy)$
    (b) $\mathbf{F} = (x/(x^2 + y^2), y/(x^2 + y^2))$
    (c) $\mathbf{F} = (x^2 + y^2 x, x^2 y)$
    (d) $\mathbf{F} = (-y/(x^2 + y^2), x/(x^2 + y^2))$

    Bestäm alla potentialer i förekommande fall.

Gauss och Stokes satser

48. Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{u} = (x + \ln(1 + z^2), y^2 + \arctan z, xy^2)$$

ut genom ellipsoiden $x^2 + 4y^2 + 3z^2 = 1$.

49. Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{u} = (x + e^{\sin z}, y + \cos(z^2), z)$$

genom ytan $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ med uppåtriktad normal.

50. Låt γ vara kurvan som ges av $z = 8 - x^2 - y^2$, $z = 4 + y^2$ genomlöpt ett varv moturs sett uppifrån z-axeln. Beräkna

$$\int_\gamma \arctan x\, dx + (x^2 + y)\, dy - (e^z + y^2 + x^2/2)\, dz.$$

51. Beräkna $\iint_Y \operatorname{rot}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{N}\, dS$, när Y är ytan som ges av $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, med $\mathbf{N}$ är riktad bort från origo och

$$\mathbf{u} = (x^2 \ln(1 + z^2), xy^2, y + \arctan z).$$