Lösningar till MMGF20 Flervariabelanalys 11 08 26 (Fysikprogrammet)

1. Vi har

$$\mathrm{grad} f = \Big(z + \frac{z}{1+(xz-y)^2}, -\frac{1}{1+(xz-y)^2}, x + \frac{x}{1+(xz-y)^2}\Big),$$

som ger

$$\mathrm{grad} f(-1,-4,2) = (2+\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, -1-\frac{1}{5}) = (\frac{12}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{6}{5}).$$

Svar: $(12/5,\ -1/5,\ -6/5)$.

2. Ytan är nivåytan $g(x,y,z) = xy + xy^2 - z = 0$ och punkten på ytan är $(1,1,f(1,1)) = (1,1,2)$.

Vi har $\mathrm{grad} g = (y+y^2, x+2xy, -1)$. En normal till tangentplanet i $(1,1,2)$ ges av $\mathrm{grad} g(1,1,2) = (2,3,-1)$ där. Eftersom det går genom $(1,1,2)$ är därför $0 = (2,3,-1)\cdot(x-1, y-1, z-2) = 2x+3y-z-3$ en ekvation för

Svar: $3 = 2x + 3y - z$.

3. Triangelskivan är kompakt och f kontinuerlig, så största och minsta värde finns med säkerhet.

Vi söker stationära punkter i det inre av triangelskivan. Där gäller $0 = f'_x = (1+x)e^{x-3y}$ $0 = f'_y = -3xe^{x-3y}$. Den andra ekvationen ger $x = 0$ som inte löser den första. Stationära punkter (i det inre) saknas.

Vi undersöker f längs randen på området, som utgörs av linjestyckena $y = -2$, $0 \le x \le 3$, $y = x/2 - 2$, $0 \le x \le 2$ samt $y = 1 - x$, $2 \le x \le 3$.

Vi får i tur och ordning $f_1(x) = f(x,-2) = xe^{x+6}$, $0 \le x \le 3$, $f_2(x) = f(x, x/2-2) = xe^{-x/2+6}$, $,0 \le x \le 2$ samt $f_3(x, 1-x) = xe^{4x-3}$.

Vi har $f'_1 = (1+x)e^{x+6}$, $f'_2 = (1-x/2)e^{5x/2+6}$ samt $f'_3 = (1+4x)e^{4x-3}$, som alla är icke-negativa på respektive funktions aktuella intervall. Det betyder att f_1, f_2 och f_3 alla är växande på sina respektive intervall. Alltså måste största och minsta värden för f antas i triangelns hörnpunkter. Vi har $f(0,-2) = 0$, $f(2,-1) = 2e^5$ och $f(3,-2) = 3e^9$.

Svar: Största värdet är $3e^9$, det minsta 0.

4. Vi gör det föreslagna variabelbytet och får med kedjeregeln $f'_x = f'_u \cdot 1 + f'_v \cdot 1$ samt $f'_y = f'_u \cdot (-a) + f'_v \cdot a$, som ger $0 = 3f'_x + f'_y = f'_u(3-a) + f'_v(3+a)$. Vi väljer $a = 3$ och får ekvationen $0 = 6f'_v$, eller $0 = f'_v$. Detta ger $f(x,y) = g(u) = g(x-3y)$, där g är en godtycklig deriverbar funktion av en variabel.

Vi ska ha $\sin 3x = f(x,0) = g(x)$, vilket bestämmer att $g(u) = \sin 3u$. Alltså är $f(x,y) = \sin 3(x-3y)$

Svar: $f(x,y) = \sin(3x - 9y)$.

5. Området är instängt mellan grafen till två funktioner av x och integralen kan därför beräknas enligt

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{6xy}{(1+xy^2)^2}\,dx\,dy &= \int_2^4 \Big(\int_{\sqrt{2+x}}^{\sqrt{6+9x}} \frac{6xy}{(1+xy^2)^2}\,dy\Big)\,dx = -\int_2^4 \Big[\frac{3}{1+xy^2}\Big]_{\sqrt{2+x}}^{\sqrt{6+9x}}\,dx = \\
&= \int_2^4 \Big(\frac{3}{1+x(2+x)} - \frac{3}{1+x(6+9x)}\Big)\,dx = \\
&= \int_2^4 \Big(\frac{3}{(1+x)^2} - \frac{3}{(1+3x)^2}\Big)\,dx = \Big[-\frac{3}{1+x} + \frac{1}{1+3x}\Big]_2^4 = \\
&= \frac{3}{3} - \frac{3}{5} + \frac{1}{13} - \frac{1}{7} = \frac{2}{5} - \frac{6}{91} = \frac{182-30}{455} = \frac{152}{455}
\end{aligned}$$

Svar: $152/455$.

6. Massan ges av trippelintegralen av densiteten över kroppen:

$$\iiint_K xy\ln(1+x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Vi går över till sfäriska koordinater genom att sätta $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$ och $z = r\cos\theta$. I den åttondel av klotet som är aktuell ska $0 \le r \le 1$, $0 \le \phi \le \pi/2$ och $0 \le \theta \le \pi/2$ och absolutbeloppet av Jakobianen är $r^2\sin\theta$. Detta ger

$$\iiint_K xy\ln(1+x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_{0\le r\le 1,\,0\le\phi\le\pi/2,0\le\theta\le\pi/2} r^4\ln(1+r^2)\cos\phi\sin\phi\sin^3\theta\,dr\,d\phi\,d\theta =$$

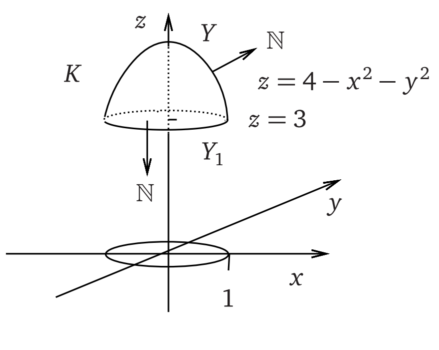
$$= \int_0^1 r^4\ln(1+r^2)\,dr\int_0^{\pi/2}\cos\phi\sin\phi\,d\phi\int_0^{\pi/2}(\sin\theta-\sin\theta\cos^2\theta)\,d\theta =$$

$$= \int_0^1 r^4\ln(1+r^2)\,dr\Big[\frac{1}{2}\sin^2\phi\Big]_0^{\pi/2}\Big[-\cos\theta+\frac{1}{3}\cos^3\theta\Big]_0^{\pi/2} = \int_0^1 r^4\ln(1+r^2)\,dr\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}$$

Det återstår att beräkna den sista integralen. Partiell integration och polynomdivision ger

$$\begin{aligned}
\int_0^1 r^4\ln(1+r^2)\,dr &= \Big[\frac{r^5}{5}\ln(1+r^2)\Big]_0^1 - \frac{2}{5}\int_0^1\frac{r^6}{1+r^2}\,dr = \\
&= \frac{\ln 2}{5} - \int_0^1\Big(\frac{(r^2+1)(r^4-r^2+1)-1}{1+r^2}\Big)\,dr = \\
&= \frac{\ln 2}{5} - \int_0^1\Big(r^4-r^2+1-\frac{1}{1+r^2}\Big)\,dr = \\
&= \frac{\ln 2}{5} - \Big[\frac{r^5}{5}-\frac{r^3}{3}+r-\arctan r\Big]_0^1 = \frac{\ln 2}{5} - \Big(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+1-\pi/4\Big) = \\
&= \frac{\ln 2}{5} - \frac{13}{15} + \pi/4
\end{aligned}$$

Svar: $\ln(2)/15 - 13/45 + \pi/12$.

7. 

Flödet ges av ytintegralen $\int_Y \mathbb{F}\cdot\mathbb{N}\,dS$, där $\mathbb{N}$ är den uppåtriktade normalen till ytan.
Ytan är inte randen till en kropp, men genom att lägga till ytan Y_1 som ges av $z = 3$, $x^2+y^2 \le 1$, med nedåtriktad normal, får vi att $Y + Y_1$ är den positivt orienterade randen till den kropp K som bestäms av $3 \le z \le 4 - x^2 - y^2$.

Vi har

$$\mathrm{div}\mathbb{F} = \frac{\partial}{\partial x}(yz) + \frac{\partial}{\partial y}(xy+z) + \frac{\partial}{\partial z}(x) = 0 + x + 0 = x$$

Divergenssatsen och polära koordinater ger

$$\begin{aligned}
\int_Y + \int_{Y_1} &= \iiint_K x\,dx\,dy\,dz = \iint_{x^2+y^2\le 1} x(4-x^2-y^2-3)\,dx\,dy = \\
&= \int_0^1\Big(\int_0^{2\pi} r^2(1-r^2)\cos t\,dt\Big)\,dr = \Big[\frac{r^3}{3}-\frac{r^5}{5}\Big]_0^1\Big[\sin t\Big]_0^{2\pi} = 0,
\end{aligned}$$

vilket man också kan komma fram till genom symmetriresonemang.

Ytan Y_1 parametriseras av $\mathbf{r}(x,y)=(x,y,3)$, $x^2+y^2\leq 1$, som ger normalen

$$\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y=\left\{\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\end{array}\right\}=(0,0,1)$$

som är motsatt riktad mot den normal vi ska använda. Detta ger

$$\begin{aligned}\int_Y \mathbb{F}\cdot\mathbb{N}\,dS &= -\int_{Y_1}\mathbb{F}\cdot\mathbb{N}\,dS=\iint_{Y_1}\mathbb{F}(\mathbf{r}(x,y))\cdot(0,0,1)\,dx\,dy=\\ &=\int_{x^2+y^2\leq 1} x\,dx\,dy=\int_{0\leq r\leq 1,\,0\leq t\leq 2\pi} r^2\cos t\,dr\,dt=\\ &=\frac{1}{3}\cdot 0=0,\end{aligned}$$

vilket också kan inses med symmetriresonemang.

Svar: 0.

8. (c) Funktionalmatrisen till $\mathbf{f}$ är

$$\begin{pmatrix}y&x\\2x&2y\end{pmatrix}_{|(x,y)=(1,2)}=\begin{pmatrix}2&1\\2&4\end{pmatrix}.$$

Lineariseringen ges av

$$\mathbf{L}(x,y)=\mathbf{f}(1,2)+\begin{pmatrix}2&1\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2x+y-4\\2x+4y-10\end{pmatrix}=(2x+y-2,2x+4y-5)$$