Lösningar till MMGF20 Flervariabelanalys 12 03 09 (Fysikprogrammet)

1. Riktningsderivatan ges av $\text{grad}f(-2,-1/2) \bullet \mathbf{v}$.

   Vi har $\text{grad}f = (2x\ln(xy) + x^2y/(xy), x^2 \cdot x/(xy))$, som ger $\text{grad}f(-2,-1/2) = (-2,-8) = 2(-1,-4)$.

   Det riktning $\mathbf{v}$ som $(3,4)$ ger är $\mathbf{v} = (1/\sqrt{9+16})(3,4)$, dvs $\mathbf{v} = (1/5)(3,4)$.

   Riktningsderivatan blir alltså $(-6-32)/5 = -38/5$.

   Den riktning i vilken f växer snabbast i punkten $(-2,-1/2)$, är den som ges av gradienten, dvs $(-1/\sqrt{17}, -4/\sqrt{17})$.

   Svar: $-38/5$ repsektive $(-1/\sqrt{17}, -4/\sqrt{17})$.

2. De stationära punkterna till f är lösningarna till ekvationssystmet

$$\begin{cases} 0 &= f'_x = 8xy + 2y = 2y(4x+1) \\ 0 &= f'_y = 4x^2 + 2x - y/4. \end{cases}$$

   Den första ekvationen ger $y = 0$ eller $x = -1/4$. Alternativet $y = 0$ ger i den andra ekvationen $0 = 2x(2x+1)$, dvs $x = 0$ eller $x = -1/2$. Detta ger de stationära punkterna $(0,0)$ och $(-1/2,0)$.

   Alternativet $x = -1/4$ ger i andra ekvationen $0 = 1/4 - 1/2 - y/4$, dvs $y = -1$ och den stationära punkten $(-1/4,-1)$.

   Vi bestämmer koeffiecienter i den kvadratiska formen Q genom ytterligare derivering:

	$(0,0)$	$(-1/2,0)$	$(-1/4,-1)$
$f''_{xx} = 8y$	0	0	-8
$f''_{xy} = f''_{yx} = 8x+2$	2	-2	0
$f''_{yy} = -1/4$	$-1/4$	$-1/4$	$-1/4$

   I $(0,0)$ har vi den kvadratiska formen $Q = 4hk - k^2/4 = -(k/2-8h)^2 + 64h^2$, som är indefinit: $Q(1,16) = 64$ och $Q(0,2) = -1$. Detta ger att $(0,0)$ är en sadelpunkt.

   I $(-1/2,0)$ har vi den kvadratiska formen $Q = -4hk - k^2/4 = -(k/2+8h)^2 + 64h^2$, som är indefinit: $Q(1,-16) = 64$ och $Q(0,2) = -1$. Detta ger att $(-1/2,0)$ är en sadelpunkt.

   I $(-1/4,-1)$ har vi den kvadratiska formen $Q = -8h^2 - k^2/4$, som bara antar negativa värden utanför origo. Den är alltså negativt definit och vi har att $(-1/4,-1)$ är en lokal maxpunkt.

   Svar: Sadelpunkt i $(0,0)$ och $(-1/2,0)$ och lokal maxpunkt i $(-1/4,-1)$.

3. Ellipsskivan är kompakt och f kontinuerlig, så största och minsta värde finns med säkerhet.

   Vi söker stationära punkter i det inre av ellipsskivan. Där gäller $0 = f'_x = y$, $0 = f'_y = x$, som ger punkten $(0,0)$. Vi har $f(0,0) = 0$.

   Vi undersöker f längs randen på området, som utgörs av ellipsen $(x/2)^2 + y^2 = 1$. Vi söker f:s största och minsta värde där genom att använda ellipsens ekvation som bivillkor: $g(x,y) = (x/2)^2 + y^2 = 1$.

   Vi ska lösa systemet

$$\begin{cases} \text{grad}f \text{ parallell med } \text{grad}g \\ g = 1. \end{cases}$$

   Det första villkoret kan formuleras som att determinanten med de två vektorerna som rader ska vara 0 :

$$0 = \begin{vmatrix} y & x \\ x/2 & 2y \end{vmatrix} = 2y^2 - x^2/2 = 2(y^2 - (x/2)^2).$$

Efter denna omformulering av första ekvationen i systemet får vi i stället

$$\begin{cases} 0 &= y^2 - (x/2)^2 \\ 1 &= (x/2)^2 + y^2 \end{cases}$$

Summan av dessa ekvationer ger $1 = 2y^2$, eller $y = \pm 1/\sqrt{2}$, som i den första ekvationen ger $x = \pm\sqrt{2}$. Detta ger de intressanta punkterna $(\pm\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2})$, där f har värdena ± 1.

Svar: Största värdet är 1, det minsta -1.

4. Vi gör det föreslagna variabelbytet och får med kedjeregeln $f'_x = f'_u \cdot 1 + f'_v \cdot 1$ samt $f'_y = f'_u \cdot a + f'_v \cdot (-1)$, som ger $0 = 4f'_x + 3f'_y = f'_u(4+3a) + f'_v$. Vi väljer $a = -4/3$ och får ekvationen $f'_v = 2\cos(x-y) = 2\cos v$. Detta ger $f = 2\sin v + g(u)$, där g är en godtycklig deriverbar funktion.

   Med x och y som koordinater ger detta $f(x,y) = 2\sin(x-y) + g(x - 4y/3)$.

   Vi ska ha $y^2 - 2\sin y = f(0,y) = 2\sin(-y) + g(-4y/3)$, vilket bestämmer, med $t = -4y/3$, att $g(t) = y^2 = 9t^2/16$.

   Alltså är $f(x,y) = 2\sin(x-y) + 9(x-4y/3)^2/16$.

   Svar: $f(x,y) = 2\sin(x-y) + (3x/4 - y)^2$.

5. Området D är instängt mellan grafen till funktionerna $\alpha(x) = x^2$ och $\beta(x) = x$, som skär varandra när $x^2 = x$, dvs när $x = 0$ och när $x = 1$.

   Upprepad integration ger

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 y\,dx\,dy &= \int_0^1 \Big(\int_{x^2}^x x^2 y\,dy\Big)\,dx = -\int_2^4 \frac{x^2}{2}\Big[y^2\Big]_{x^2}^x\,dx = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 (x^4 - x^6)\,dx = \\ &= \frac{1}{2}\Big[\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\Big) = \frac{1}{35}. \end{aligned}$$

   Svar: 1/35.

6. Ytan parametriseras av $\mathbf{r}(x,y) = (x, y, 1+xy)$. Derivering ger $\mathbf{r}'_x = (1,0,y)$ och $\mathbf{r}'_y = (0,1,x)$, vars kryssprodukt är $(-y,-x,1)$ med längd $\sqrt{1+x^2+y^2}$.

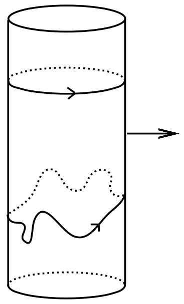
   Med D som området $0 \le x$, $x^2+y^2 \le 1$ har vi därför

$$\begin{aligned} I = \iint_Y \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,dS &= \iint_D \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \cdot \sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy = \\ &= \iint_D x\,dx\,dy \end{aligned}$$

   Övergång till polära koordinater med $0 \le r \le 1$ och $-\pi/2 \le t \le \pi/2$ ger

$$I = \int_0^1 \Big(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r\cos(t)\cdot r\,dt\Big)\,dr = \int_0^1 r^2\Big[\sin t\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2}\,dr = 2\Big[\frac{r^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

   Svar: 2/3.

7. 

Välj en mediankurva μ till cylindern högt upp på cylindern orienterad enligt anvisningarna i uppgiften. De två kurvorna utgör då till sammans randen till en yta Y på cylindern. Den utåtriktade normalen $\mathbb{N} = (x, y, 0)$ (normering av gradienten till $x^2 + y^2 = 1$) ger att med positiv orientering är ∂D kurvorna γ och $-\mu$.
Stokes sats ger

$$\int_\gamma + \int_{-\mu} = \int_{\partial Y} = \iint_Y \operatorname{rot}(\mathbf{u}) \bullet \mathbb{N}\, dS,$$

där $\mathbf{u} = (xz^2, y(z^2 + xy), z)$.

Vi har

$$\operatorname{rot}(\mathbf{u}) \quad = \quad \left\{ \begin{matrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xz^2 & y(z^2+xy) & z \end{matrix} \right\} = (0 - 2yz, -0 + 2xz, ?)$$

som ger

$$\operatorname{rot}(\mathbf{u}) \cdot \mathbb{N} = (-2yz, 2xz, ?) \bullet (x, y, 0) = 0$$

och

$$\int_\gamma = \int_\mu +\ 0.$$

Vi ser att vi kan ersätta γ med en mediankurva, men också med samma argument, att vi kan ersätta mediankurvan med den mediankurva σ på cylindern där $z = 0$.

Detta ger

$$\int_\gamma = \int_\sigma 0\, dx + y(0 + xy)\, dy + 0\, dz = \int_\sigma xy^2\, dy$$

Vi ska alltså beräkna en kurvintegral i planet där σ är enhetscirkeln ett varv moturs. Greens formel och polära koordinater ger

$$\int_\sigma \quad = \quad \iint_D y^2\, dx\, dy = \int_0^1 \Big(r^3 \int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt \Big)\, dr = \Big[\frac{r^4}{4}\Big]_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)\, dt = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4}.$$

Svar: $\pi/4$.

8. (c) Vi har $\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 1 + 1 + 1 = 3$, så flödet blir med Gauss sats 3 gånger volymen av enhetsklotet som är $4\pi/3$.

Svar: 4π.