Lösningar till MMGF20 Flervariabelanalys 12 06 07 (Fysikprogrammet)

1. Riktningsderivatan är störst i den riktning $\mathbf{v}$, som ges av $\mathrm{grad}f(1,1,1)$. Riktningsderivatan är i den rikntingen $|\mathrm{grad}f(1,1,1)|$.

   Vi har
$$\mathrm{grad}f = (y + 2xz, x + z, x^2 + y),$$
   som ger $\mathrm{grad}f(1,1,1) = (3,2,2)$.

   Detta ger $|\mathrm{grad}f(1,1,1) = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}$ och $\mathbf{v} = (1/|\mathrm{grad}f(1,1,1)|)\mathrm{grad}f(1,1,1) = (1/\sqrt{17})(3,2,2)$.

   Svar: $\mathbf{v} = (3/\sqrt{17}, 2/\sqrt{17}, 2/\sqrt{17})$ repsektive $\sqrt{17}$.

2. Vi bestämmer först s och t, så att $\mathbf{r}(s,t) = (1,2,3)$. Detta ger ekvationssystemet
$$\begin{cases} st &= 1 \\ s^2t &= 2 \\ 2(s-t) &= 3 \end{cases}$$
   Den andra ekvationen delat med den första ger $s = 2$, som i den första ger $t = 1/2$. Man ser att dessa värden på s och t löser alla ekvationer i systemet.

   En normalvektor till tangentplanet genom $(1,2,3)$ ges av $\mathbf{n} = \mathbf{r}'_s(2,1/2) \times \mathbf{r}'_t(2,1/2)$. Vi har
$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_s &= (t, 2st, 2) \\ \mathbf{r}'_t &= (s, s^2, -2), \end{aligned}$$
   som ger
$$\mathbf{n} \quad = \quad \left\{ \begin{array}{rrr} 1/2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \end{array} \right\} = (-12, 5, -2).$$
   Vi kan också välja $\mathbf{n} = (12, -5, 2)$. Gör vi det blir tangentplanets ekvation
$$0 = 12(x-1) - 5(y-2) + 2(z-3) = 12x - 5y + 2z - 8.$$
   Svar: $8 = 12x - 5y + 2z$.

3. De stationära punkterna till f är lösningarna till ekvationssystmet
$$\begin{cases} 0 &= f'_x = e^{xy}(xy + 2xy^2 + 1 + 2y) \\ 0 &= f'_y = e^{xy}(x^2 + 2x^2y + 2x). \end{cases}$$
   Eftersom exponentialfunktionen alltid är positiv ger detta
$$\begin{cases} 0 &= y(x + 2xy + 2) + 1 \\ 0 &= x(x + 2xy + 2) \end{cases}$$
   Den andra ekvationen ger $x = 0$ eller $x + 2xy + 2 = 0$. Alternativet $x = 0$ ger i den första ekvationen $2y + 1 = 0$ så att $(0, -1/2)$ är en stationär punkt till f.

   Alternativet $0 = x + 2xy + 2$ ger i den första ekvationen $0 = 1$ som saknar lösning.

   Den enda stationära punkten är alltså $(0, -1/2)$. Vi undersöker dess karaktär genom att bestämma den kvadratiska formen till f i punkten.

   Vi har

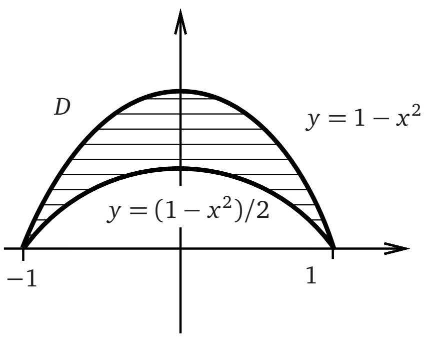
	$(0,-1/2)$
$f''_{xx} = e^{xy}(xy^2 + 2xy^3 + y + 2y^2 + y + 2y^2)$	0
$f''_{xy} = f''_{yx} = e^{xy}(x^2y + 2x^2y^2 + x + 2xy + x + 4xy + 2)$	2
$f''_{yy} = e^{xy}(x^3 + 2x^3y + 2x^2 + 2x^2)$	0

   I $(0,-1/2)$ har vi därför den kvadratiska formen $Q = 0 \cdot h^2 + 2 \cdot 2 \cdot hk + 0 \cdot k^2 = 4hk$. Vi ser att Q är indefinit för (t.ex.) $Q(1,1) > 0$, medan $Q(1,-1) < 0$.

   Det betyder att $(0,-1/2)$ är en sadelpunkt till f, som därför saknar lokala extrempunkter.

   Svar: Lokala extrempunkter saknas.

4.



Vi har att graferna $y = 1 - x^2$ och $y = (1 - x^2)/2$ skär varandra när $(1 - x^2) = (1 - x^2)/2$, d.v.s när $x^2 = 1$, eller $x = \pm 1$.
En skiss av området D ges i figuren till vänster.
Vi får nu

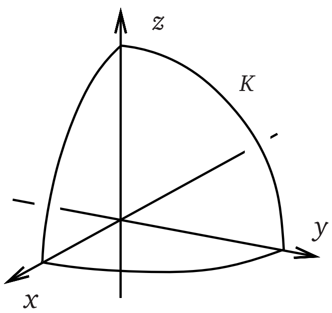
$$\iint_D x^2 y\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} x^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{(1-x^2)/2}^{1-x^2} dx =$$

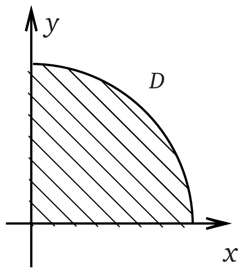
$$= \frac{3}{8}\int_{-1}^{1} x^2(1 - x^2)^2\, dx = \frac{3}{8}\int_{-1}^{1} (x^2 - 2x^4 + x^6)\, dx =$$

$$\frac{3}{8}\left[\frac{x^3}{3} - 2\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7}\right]_{-1}^{1} = \frac{3}{8}\Big(\frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{2}{7}\Big) = \frac{1}{8}\Big(2 - \frac{12}{5} + \frac{6}{7}\Big) = \frac{1}{8}\cdot\frac{70 - 84 + 30}{35} = \frac{2}{35}.$$

Svar: 2/35.

5.





Kroppen K är en fjärdedel av ett halvklot med radie 1. Den är instängd mellan graferna till $z = 0$ och $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ över området D i x, y-planet. Detta området är kvartscirkeln $x^2 + y^2 \leq 1$, $x, y \geq 0$.
Upprepad integration ger

$$\iiint_K xz\, dx\, dy\, dx = \iint_D x\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{2}\iint_D x(1 - x^2 - y^2)\, dx\, dy = I.$$

Övergång till polära koordinater ger att D motsvaras av D' som ges av $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq t \leq \pi/2$. Detta ger

$$I = \frac{1}{2}\iint_{D'} (r\cos t)(1 - r^2) r\, dr\, dt =$$

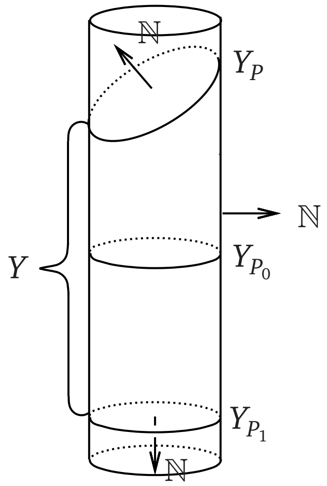
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \Big(r^2 - r^4\Big)\, dr \cdot \int_0^{\pi/2} \cos t\, dt = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\Big)\cdot 1 = \frac{1}{15}.$$

Svar: 1/15.

6. Ytan parametriseras av $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$, där (x, y) ligger i området D som bestäms av $0 \leq x \leq y$, $0 \leq y \leq 1$. Derivering ger $\mathbf{r}'_x = (1, 0, 2x)$ och $\mathbf{r}'_y = (0, 1, 2y)$, vars kryssprodukt är $(-2x, -2y, 1)$ med längd $\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$. Vi har därför, eftersom $z = x^2 + y^2$ på ytan Y, att

$$\begin{aligned}
\iint_Y \sqrt{1 + 4z}\, dS &= \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\cdot\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dx\, dy = \\
&= \iint_D \Big(1 + 4x^2 + 4y^2\Big)\, dx\, dy = \int_0^1 \Big[x + \frac{4}{3}\cdot x^3 + 4xy^2\Big]_0^y dy = \\
&= \int_0^1 \Big(y + \frac{16}{3}y^3\Big)\, dy = \Big[\frac{1}{2}\cdot y^2 + \frac{4}{3}\cdot y^4\Big]_0^1 = \frac{11}{6}.
\end{aligned}$$

Svar: 11/6.

7. 

Låt P vara ett fixt plan som i uppgiften. Välj ett plan P_1 vinkelrätt mot z-axeln som skär denna långt ned. En del av planen P och P_1 bildar då tillsammans med en del av cylindern randen ∂K till en begränsad kropp K.
Flödet genom Y_p ges av integralen $\iint_{Y_p} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ där, $\mathbf{N}$ är den uppåtriktade normalen till Y_P.
Enligt Gauss formel har vi

$$\int_{\partial K} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iiint_K \operatorname{div}\mathbf{F}\,dx\,dy\,dz,$$

där $\mathbf{N}$ är den utåtriktade normelen till ∂K.
Vi har $\operatorname{div}\mathbf{F} = \partial P/\partial x + \partial Q/\partial y + \partial R/\partial z$, där

$$\mathbf{F} = (P, Q, R) = ((z+1)y^2, -(z+1)xy, x^2 + xz + xz^2/2).$$

Detta ger $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0 - (z+1)x + x + xz = 0$.

Ytan ∂K består av Y_P, Y_{P_1} och en del Y av cylindern. Detta ger

$$0 = \int_{\partial K} = \int_{Y_P} + \int_Y + \int_{Y_{P_1}}.$$

Längs Y ges den utåtriktade normalen av $\mathbf{N} = (x, y, 0)$ och

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_Y 0\,dS = 0.$$

Av detta följer att

$$\int_{Y_P} = -\int_{Y_{P_1}},$$

om vi ger Y_{P_1} den *nedåtriktade normalen.* Om vi istället ger den den uppåtriktade normalen blir det

$$\int_{Y_P} = \int_{Y_{P_1}},$$

Om vi låter P_0 vara planet $z = 0$ får vi, eftersom P är godtyckligt ovan att

$$\int_{Y_{P_0}} = \int_{Y_{P_1}} = \int_{Y_P}.$$

Vi har alltså att flödet blir samma för alla plan som i uppgiften.

För att beräkna värdet kan vi göra det för planet $z = 0$. Vi får då, om vi sätter $Y_{P_0} = D$, där D är enhetscirkeln, att

$$\iint_{Y_{P_0}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_D \mathbf{F}\cdot(0,0,1)\,dx\,dy = \iint_D x^2\,dx\,dy = I.$$

Med polära koordinater motsvarar D området D' som ges av $0 \le r \le 1$, $0 \le t \le 2\pi$. Vi får då

$$I = \int_0^1 r^3\,dr \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{4}\cdot\pi.$$

Svar: $\pi/4$.

8. (c) Vi har enligt Greens formel, om ∂D är randen till ellipsskivan D, orienterad som i uppgiften, att arbetet ges av

$$\int_{\partial D} 2xy\,dx + (x^2 + x)\,dy = \int_D (-2x + 2x + 1)\,dx\,dy,$$

som är arean av ellipsskivan. Ellipsen har halvaxlarna $a = 1/2$ och $b = 1$, så skivans area är $ab\pi = \pi/2$

Svar: $\pi/2$.