Lösningar till MMGF20 Flervariabelanalys 12 08 31 (Fysikprogrammet)

1. Ytan är en nivåyta till funktionen $f(x,y,z) = xy + xy^2 - z^2 + 7$, så en normal till tangentplanet ges av gradienten till $f = xy + xy^2 - z^2 + 7$ i punkten $(-1,2,-1)$. Vi har $\text{grad} f = (y + y^2, x + 2xy, -2z)$, vilket i den aktuella punkten ger vektorn $(6,-5,2)$, som alltså är en normal till tangentplanet. Det ger att plantet har en ekvation $6x - 5y + 2z = d$. Men planet ska gå genom $(-1,2,-1)$, så $-6 - 10 - 2 = d$.

   Svar: $6x - 5y + 2z + 18 = 0$.

2. De stationära punkterna till f är lösningarna till ekvationssystmet

$$\begin{cases} 0 = f'_x = 8xy + 2y = 2y(4x+1) \\ 0 = f'_y = 4x^2 + 2x - y/4. \end{cases}$$

   Den första ekvationen ger $y = 0$ eller $x = -1/4$. Alternativet $y = 0$ ger i den andra ekvationen $0 = 2x(2x+1)$, dvs $x = 0$ eller $x = -1/2$. Detta ger de stationära punkterna $(0,0)$ och $(-1/2,0)$.

   Alternativet $x = -1/4$ ger i andra ekvationen $0 = 1/4 - 1/2 - y/4$, dvs $y = -1$ och den stationära punkten $(-1/4,-1)$.

   Vi bestämmer koeffiecienter i den kvadratiska formen Q genom ytterligare derivering:

	$(0,0)$	$(-1/2,0)$	$(-1/4,-1)$
$f''_{xx} = 8y$	0	0	-8
$f''_{xy} = f''_{yx} = 8x + 2$	2	-2	0
$f''_{yy} = -1/4$	$-1/4$	$-1/4$	$-1/4$

   I $(0,0)$ har vi den kvadratiska formen $Q = 4hk - k^2/4 = -(k/2 - 8h)^2 + 64h^2$, som är indefinit: $Q(1,16) = 64$ och $Q(0,2) = -1$. Detta ger att $(0,0)$ är en sadelpunkt.

   I $(-1/2,0)$ har vi den kvadratiska formen $Q = -4hk - k^2/4 = -(k/2 + 8h)^2 + 64h^2$, som är indefinit: $Q(1,-16) = 64$ och $Q(0,2) = -1$. Detta ger att $(-1/2,0)$ är en sadelpunkt.

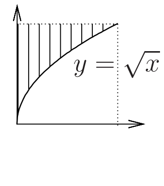
   I $(-1/4,-1)$ har vi den kvadratiska formen $Q = -8h^2 - k^2/4$, som bara antar negativa värden utanför origo. Den är alltså negativt definit och vi har att $(-1/4,-1)$ är en lokal maxpunkt.

   Svar: Sadelpunkt i $(0,0)$ och $(-1/2,0)$ och lokal maxpunkt i $(-1/4,-1)$.

3. Vi gör det föreslagna variabelbytet och får med kedjeregeln $f'_x = f'_u \cdot a + f'_v \cdot 0$ samt $f'_y = f'_u \cdot 2y + f'_v \cdot 1$, som ger $0 = yf'_x - 2f'_y = f'_u(ay - 4y) - 2f'_v$. Vi väljer $a = 4$ och får ekvationen $-2f'_v = x + y = (u - y^2)/4 + y = (u - v^2)/4 + v$. Detta ger $f = -uv/8 + v^3/24 - v^2/4 + g(u)$, där g är en godtycklig deriverbar funktion.

   Med x och y som koordinater ger detta $f(x,y) = -(4x + y^2)y/8 + y^3/24 - y^2/4 + g(4x + y^2)$. Som förenklas till $f(x,y) = -xy/2 - y^3/12 - y^2/4 + g(4x + y^2)$.

   Svar: $f(x,y) = -xy/2 - y^3/12 - y^2/4 + g(4x + y^2)$.

4. 

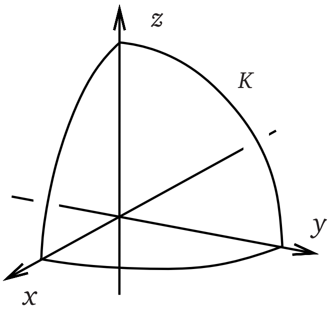
   Området kan också beskrivas av $0 \le y \le 1$, $0 \le x \le y^2$. Vi integrerar först med avseende på x och får

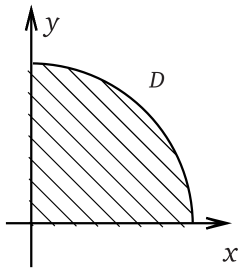
$$\int_0^1 \Big[y^2 e^{xy}\Big]_{x=0}^{x=y^2} dy = \int_0^1 (y^2 e^{y^3} - y^2)\, dy =$$

$$= \Big[e^{y^3}/3 - y^3/3\Big]_0^1 = e/3 - 2/3$$

   Svar: $(e-2)/3$.

5.





Kroppen K är en fjärdedel av ett halvklot med radie 1. Den är instängd mellan graferna till $z = 0$ och $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ över området D i x, y-planet. Detta området är kvartscirkeln $x^2 + y^2 \leq 1$, $x, y \geq 0$.
Upprepad integration ger

$$\iiint_K xz\,dx\,dy\,dx = \iint_D x\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx\,dy = \\ = \frac{1}{2}\iint_D x(1 - x^2 - y^2)\,dx\,dy = I.$$

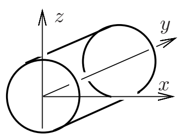
Övergång till polära koordinater ger att D motsvaras av D' som ges av $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq t \leq \pi/2$. Detta ger

$$I = \frac{1}{2}\iint_{D'} (r\cos t)(1 - r^2)r\,dr\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(r^2 - r^4\right) dr \cdot \int_0^{\pi/2} \cos t\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \cdot 1 = \frac{1}{15}.$$

Svar: $1/15$.

6.



Om Y betecknar cylindern ges flödet av $\iint_Y \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. En parametrisering av cylindern ges av $\mathbf{r}(s,t) = (\cos t, s, \sin t)$ där $(s,t) \in D$ och D ges av $0 \leq s \leq 2$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Vi får

$$\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\sin t & 0 & \cos t \end{Bmatrix} = (\cos t, 0, \sin t)$$

som anger rätt riktning (bort från y-axeln).
Med denna parametrisering blir därför flödet

$$\begin{aligned} \iint_Y \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_D \cos^2(t)s(\cos t, s, \sin t) \cdot (\cos t, 0, \sin t)\,dsdt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt \cdot \int_0^2 s\,ds = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t)\,dt \cdot 2 = \left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\pi \end{aligned}$$

Svar: 2π.

7. (b) Vi har $\nabla f = (2xy, x^2)$, så riktningsderivatan blir

$$\nabla f(1,2) \cdot (3,-4)/\sqrt{3^2 + (-4)^2} = (4,1) \cdot (3,-4)/5 = 8/5$$

Svar: $5/8$

(c) Riktningsderivatan är störst i den riktning som ges av $\nabla f(1,2) = (4,1)$
Svar: $(4,1)/\sqrt{17}$.

8. (c) Vi har enligt Greens formel, om ∂D är randen till ellipsskivan D, orienterad som i uppgiften, att arbetet ges av

$$\int_{\partial D} 2xy\,dx + (x^2 + x)\,dy = \int_D (-2x + 2x + 1)\,dx\,dy,$$

som är arean av ellipsskivan. Ellipsen har halvaxlarna $a = 1/2$ och $b = 1$, så skivans area är $ab\pi = \pi/2$
Svar: $\pi/2$.