Lösningar till tenta i MMGF20/LGMA50

26/8 2014

Elin Götmark

1. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy+x^3y}$$

Sorry, denna blev lite bedräglig! Har rättat den generöst.

Problemet är att funktionen inte är definierad när $xy=0$ (dvs på x och y-axlarna) eftersom nämnaren då är noll.

Men vi har
$$\frac{\sin(xy)}{xy+x^3y} = \underbrace{\frac{\sin(xy)}{xy}}_{\to 1 \text{ när } xy\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{\to 1 \text{ om } x\to 0} \to 1$$

Det går också att definiera funktionen överallt på xy-planet så att den blir kontinuerlig. Då kan vi def:

$$f(0,y) = 1$$
$$f(x,0) = \frac{1}{1+x^2}$$

(2) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

$$\begin{cases} f'_x = 4x^3 - 4y = 0 \\ f'_y = 4y^3 - 4x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 = y \\ y^3 = x \end{cases}$$

$$x = y^3 = (x^3)^3 = x^9 \iff x(x^8 - 1) = 0$$

$x = 0$ eller $x = \pm 1$. Eftersom $y = x^3$

är de kritiska punkterna:

$(0,0)$, $(1,1)$, och $(-1,-1)$.

Vi behöver ta fram andragradsdelen av Taylorutvecklingen av funktionen i dessa punkter

Kring $(0,0)$ behöver vi inte göra något:

$$f(x,y) = 1 \underbrace{- 4xy}_{\text{andragradsdelen.}} + x^4 + y^4$$

$(0,0)$ är alltså indefinit.

$(x,y) = (1,1)$: $f''_{xx} = 12x^2$ $f''_{yy} = 12y^2$ $f''_{xy} = -4$

$$f''_{xx}(1,1) = 12 = f''_{yy}(1,1) \quad f''_{xy}(1,1) = -4$$

$$Q(h,k) = 12h^2 + 12k^2 - 8hk =$$
$$= 12\left(h^2 - \frac{2}{3}hk + k^2\right) = 12\left(\left(h - \frac{1}{3}k\right)^2 - \frac{k^2}{9} + k^2\right) =$$
$$= 12\left(\left(h - \frac{1}{3}k\right)^2 + \frac{8}{9}k^2\right)$$

dvs positivt definit.

$\underline{(x,y) = (-1,-1)}$ $\quad f''_{xx}(-1,-1) = 12 = f''_{yy}(-1,-1)$

$f''_{xy}(-1,-1) = -4$ dvs samma $Q(h,k)$

$\Rightarrow (-1,-1)$ är också positivt definit.

3. Sätt $f(x,y,z) = \sin(x+y) - z$.

$$\nabla f = (\cos(x+y), \cos(x+y), -1)$$
$$\nabla f(1,-1,0) = (\cos(0), \cos(0), -1) = (1, 1, -1).$$

Vi söker alltså ett plan som är vinkelrätt mot $(1,1,-1)$ och går genom $(1,-1,0)$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff (x-1) + (y+1) + (-1)\cdot z = 0$$

$$\iff \underline{x + y - z = 0}$$

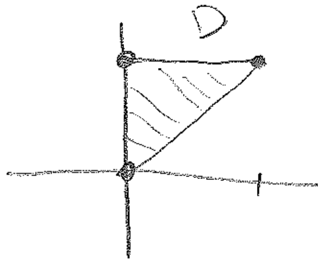
<u>Alternativ lösning</u>: Sätt $z = g(x,y) = \sin(x+y)$ och använd formeln

$$z = g(1,-1) + g'_x(1,-1)(x-1) + g'_y(1,-1)(y+1).$$

(4.) Arean $= \iint_D |\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y| \, dx\,dy$, där

$D =$ triangeln i uppg, och $\mathbf{r}$ är en parametrisering av ytan. Eftersom det är en graf kan vi använda $\mathbf{r}(x,y) = (x, y, x+y^2)$.

$\mathbf{r}'_x = (1,0,1) \qquad \mathbf{r}'_y = (0,1,2y)$.




$$\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y| = \sqrt{1+4y^2+1} = \sqrt{2+4y^2}$$

$$\text{Arean} = \int_0^1 \int_0^y \sqrt{2+4y^2} \, dx\, dy =$$

$$= \int_0^1 y\sqrt{2+4y^2} \, dy = \left\{ \begin{array}{ll} t = 2+4y^2 & y=0 \Leftrightarrow t=2 \\ \frac{dt}{dy} = 8y \quad dt = 8y\,dy & y=1 \Leftrightarrow t=6 \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{8}\int_2^6 \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{8}\left[ \frac{t^{3/2}}{3/2} \right]_2^6 = \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\left(6^{3/2} - 2^{3/2}\right) =$$

$$= \frac{1}{12}\left(6\sqrt{6} - 2\sqrt{2}\right) = \underline{\underline{\frac{(3\sqrt{3}-1)}{3\sqrt{2}}}}$$

(5.) $\mathbf{r}'(t) = (3t^2, 2t, 1)$

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \left( \sin(t^3)\cdot 3t^2 + \cos(t^2)\cdot 2t + t^3 \cdot t \cdot 1 \right) dt =$$

$$= \left[ -\cos(t^3) + \sin(t^2) + \frac{t^5}{5} \right]_0^1 =$$

$$= -\cos(1) + \sin(1) + \frac{1}{5} + 1 =$$

$$= \underline{\underline{\frac{6}{5} + \sin(1) - \cos(1)}}$$

6. K är en del av en cylinder längs x-axeln. Enligt divergenssatsen gäller:

$$\iint_{\partial K} \mathbb{F} \cdot \mathbb{N} \, dS = \iiint_K \operatorname{div}(\mathbb{F}) \, dV = (*)$$

$$\operatorname{div}(\mathbb{F}) = 3y^2 + 0 + 3z^2 = 3(y^2+z^2).$$

$$(*) = \iint_{y^2+z^2 \leq 1} \left( 3(y^2+z^2) \int_{-1}^{2} dx \right) dy\,dz = \iint_{y^2+z^2 \leq 1} 9(y^2+z^2) \, dy\,dz =$$

$$= 9 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cdot r\,dr\,d\theta = 18\pi \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = 18\pi \cdot \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{9\pi}{2}}}$$

7. Se boken s. 311, Sats 4.

8. a. Se boken s. 63, Def 4

b. Se boken s. 18.

c. — " — s. 69, Sats 8