Tentamen i MMGF20/LGMA50, 9/6 2014, 8.30-12.30
Matematiska Vetenskaper, Göteborgs universitet
Elin Götmark (070-6787423)
Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Räkna ut följande gränsvärde, om det existerar: (3p)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}.$$

2. Bestäm största och minsta värdet av funktionen $f(x,y) = x^2y$ på ellipsen $x^2 + 4y^2 = 6$. (3p)

3. Lös differentialekvationen (3p)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + 2\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0, \qquad u(x,0) = \sin(x)$$

med hjälp av variabelbytet

$$\begin{cases} y_1 = x + 2t \\ y_2 = x - 2t \end{cases}$$

4. Räkna ut volymen av området som ligger inuti cylindern $x^2 + z^2 = 4$ och uppfyller villkoren $y \geq 0$ och $y \leq z$. (3p)

5. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F} = (x+y^2, y+z^2, z+x^2)$ och $\gamma$ är kurvan som börjar i $(1,0,0)$, går i en rät linje till $(0,1,0)$, sedan till $(0,0,1)$, och till sist tillbaka till $(1,0,0)$ (det blir alltså en triangel). (3p)

6. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (x^2+y^2, y^2-z^2, z)$ ut genom den del av ytan $x^2+y^2+z^2 = 1$ som ligger ovanför $z$-planet. (3p)

7. a) Låt $\mathbf{F}$ vara ett konservativt vektorfält med potential $U$ i ett öppet område $D \subset \mathbb{R}^2$, och låt $\gamma$ vara en kurva i $D$ som börjar i $\mathbf{a}$ och slutar i $\mathbf{b}$. Visa att (2p)

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{b}) - U(\mathbf{a}).$$

b) Använd satsen för att räkna ut $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ om $\gamma$ ges av $\mathbf{r}(t) = (2^t, 3-t)$ där $0 \leq t \leq 2$ och $\mathbf{F} = (y+2x, x)$. (2p)

8. a) Låt funktionen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vara definierad i ett område $D \subset \mathbb{R}^n$, och låt $a$ vara en inre punkt i $D$. Definiera vad som menas med att $f$ är differentierbar i $a$. (1p)
b) Bevisa att om $f$ är differentierbar i $a$ så är $f$ också partiellt deriverbar i $a$ med avseende på $x_1, \ldots x_n$. (2p)