Tentamen i MMGF20/LGMA50, 26/8 2014, 8.30-12.30
Matematiska Vetenskaper, Göteborgs universitet
Elin Götmark (070-6787423)
Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Räkna ut följande gränsvärde, om det existerar: (3p)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy + x^3 y}.$$

2. Hitta och klassificera de kritiska punkterna till $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$ (dvs avgör om de är positivt/negativt definita/semidefinita eller indefinita). (3p)

3. Hitta ekvationen för tangentplanet till ytan $z = \sin(x+y)$ i punkten $(1,-1,0)$. (3p)

4. Räkna ut arean av den del av ytan $z = x + y^2$ som ligger ovanför triangeln i xy-planet som har hörn i $(0,0)$, $(1,1)$, och $(0,1)$. (3p)

5. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där $\mathbf{F} = (\sin(x), \cos(y), xz))$ och γ är kurvan som parametriseras av $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^2, t)$ där $0 \le t \le 1$. (3p)

6. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (3xy^2, xe^z, z^3)$ ut genom ytan som utgörs av randen till $K = \{(x,y,z) : y^2 + z^2 \le 1, -1 \le x \le 2\}$. (3p)

7. Antag att vektorfältet $\mathbf{F} = (P, Q)$ uppfyller villkoret $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ i ett enkelt sammanhängade öppet område Ω av planet. Visa att $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ för varje sluten kurva γ i Ω. (3p)

8. a) Definiera vad som menas med gradienten ∇f av en funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. (1p)
b) Definiera vad som menas med en nivåyta till funktionen $f(x,y,z)$. (1p)
c) Vad finns det för samband mellan gradienten till f i en punkt (a,b,c) och nivåytan som går genom samma punkt? (2p)