Tentamen i MMGF20, 14/3 2014, 14.00-18.00
Matematiska Vetenskaper, Göteborgs universitet
Elin Götmark (070-6787423)
Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Kan funktionen $f(x, y) = x^2/(x^2 + y^2)$, $(x, y) \neq (0, 0)$, definieras i origo så att den blir kontinuerlig i hela planet? (3p)

2. Bestäm största och minsta värdet av funktionen $f(x, y) = xy - x^3y^2$ på området där $-1 \leq x \leq 1$ och $-1 \leq y \leq 1$. (3p)

3. Bestäm tangentlinjen i $(-\sqrt{3}, 0, 1)$ till kurvan som består av skärningen mellan ytorna $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ och $y^2 + z^2 = 1$. Svara med en parametrisering av linjen. (3p)

4. Räkna ut integralen $\iint_D xy \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, där $D = \{(x, y) : 0 \leq x + y \leq 1 \text{ och } 0 \leq x - 2y \leq 1\}$. (3p)

5. Beräkna arean av ytan $Y = \{(x, y, z)\colon y = x^2 + z^2, \text{ och } y \leq 1\}$. (3p)

6. Beräkna integralen $\iint_Y (\text{rot } \mathbf{u}) \cdot \mathbf{N} \, \mathrm{d}S$, där $\mathbf{u} = (-yz, x^2, z + y^2)$, där Y är den del av ytan $z = 1 - (x^2 + y^2)^2$ som ligger ovanför xy-planet, och $\mathbf{N}$ är ytans uppåtriktade enhetsnormal. (3p)

7. a) Definiera vad det betyder att ett vektorfält $\mathbf{F} = (P, Q)$ är konservativt i ett område D i $\mathbb{R}^2$. (1p)
   b) Bevisa att om $\mathbf{F}$ är konservativt och tillräckligt deriverbart, så är $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$. (1p)
   c) Är vektorfältet $\mathbf{F} = (x, y)/\sqrt{x^2 + y^2}$ konservativt i $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$? (2p)

8. a) Definiera vad som menas med riktningsderivatan $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a})$ av en funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i punkten $\mathbf{a}$ och med avseende på enhetsvektorn $\mathbf{v}$. (1p)
   b) Bevisa att $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}$ om f är differentierbar. (2p)