Lösningar tenta MMGF20
8/6 2015 Elin Götmark

(1.) Vi kan definiera funktionen i $(0,0)$ så att den blir kontinuerlig om gränsvärdet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$ existerar.

Vi går först mot $(0,0)$ längs vägen $(x,0)\to(0,0)$:

$$f(x,0) = \frac{x^2}{x^2} = 1 \to 1 \quad \text{när } x\to 0.$$

Sedan låter vi $x=y$:

$$f(x,x) = \frac{x^2-x^2}{x^2+x^2} = 0 \to 0 \quad \text{när } x \to 0.$$

Vi får olika svar, alltså existerar inte gränsvärdet.

(2.) a) Vi behöver gradienten:

$$\nabla f = (y\cos(x) - z^2, \sin(x), e^z - 2xz)$$

och dess värde i $(\frac{\pi}{2}, 1, 0)$:

$$\nabla f(\tfrac{\pi}{2}, 1, 0) = (0, 1, 1).$$

Då är tangentplanets ekvation

$$\nabla f(a)\cdot(x - a) = 0 \quad \text{där } a = (\tfrac{\pi}{2}, 1, 0),$$

dvs $(0,1,1)\cdot(x-\frac{\pi}{2}, y-1, z-0) = y-1+z = 0$,

alltså $\underline{\underline{y+z=1}}$

(b.) Riktningsderivatan ges av

$f'_{v_1}(a_1) = \nabla f(a_1) \cdot v_1$, där $a_1 = (\frac{\pi}{2}, 1, 0)$

och $v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ (vi måste normera $(1,1,1)$). Alltså är $f'_{v_1}(a_1) = (0,1,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) =$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}(1+1) = \underline{\underline{\frac{2}{\sqrt{3}}}}$

(3.) Vi börjar med att visa att funktionen $\to 0$ när $x^2+y^2 \to \infty$. Då måste vi visa att exponenten $\to -\infty$.

$1-x+2y-x^2-y^2 = -(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} - (y-1)^2 + 1 + 1 =$

$= -(x+\frac{1}{2})^2 - (y-1)^2 + \frac{9}{4}$

Det är uppenbart att detta $\to -\infty$ när $x^2+y^2 \to \infty$. Alltså är $\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} f(x,y) = 0$.

Vi letar nu efter lokala min/max!

$$\begin{cases} f'_x = e^{1-x+2y-x^2-y^2}\cdot(-1-2x) = 0 \\ f'_y = e^{1-x+2y-x^2-y^2}\cdot(2-2y) = 0 \end{cases}$$

Dela med exponentialen:

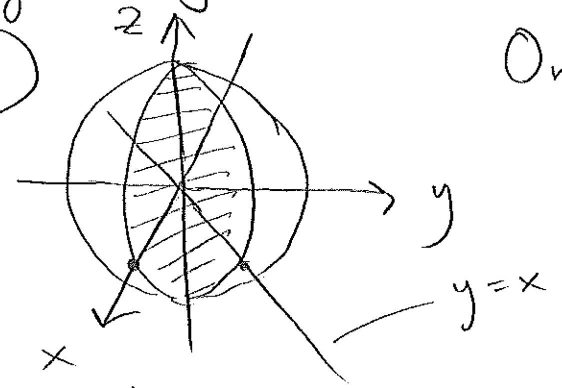
$$\begin{cases} -1-2x = 0 \\ 2-2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

$f(-\frac{1}{2}, 1) = e^{1+\frac{1}{2}+2-\frac{1}{4}-1} = e^{2{,}25}$

Eftersom vi vet att $f \to 0$ när $x^2+y^2 \to \infty$, så kan vi välja en cirkel med så stor radie att $f(x,y) < 1$ (till exempel) utanför cirkelskivan. Då antas f:s globala max inuti cirkelskivan. Eftersom cirkelskivan är kompakt så antar f ett maximum där. Max antas inte på randen eftersom $f < 1$ där. Då måste max antas i ett lokalt maximum i det inre, dvs (f:s globala) max är $\underline{f(-\frac{1}{2}, 1) = e^{2,25}}$.

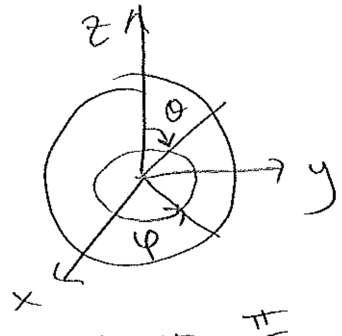
Funktionen är positiv eftersom den är en exponential. Men $f \to 0$, så det finns inget globalt min.

4.



Området är en "klyfta" av enhetsbollen. I rymdpolära koordinater ges området av:

$$0 \le r \le 1$$
$$0 \le \theta \le \pi$$
$$0 \le \varphi < \frac{\pi}{4}$$



Då är:

$$\iiint_V (1+z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + r\cos\theta) r^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \, dr =$$

$$= \int_0^1 r^2\,dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,d\varphi \cdot \int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta +$$

$$+ \int_0^1 r^3\,dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,d\varphi \cdot \int_0^{\pi} \cos\theta \sin\theta\,d\theta =$$

$$= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} + \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \int_0^{\pi} \frac{\sin 2\theta}{2}\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left(-(+1) - (-1)\right) + \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left[-\frac{\cos(2\theta)}{4}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2\pi}{3 \cdot 4} - \frac{\pi}{4 \cdot 4}(1-1) = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}}}$$

5. Vi använder Greens sats:

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = (*) \text{ där}$$

$$D = \{ x^2 + y^2 \le 4 \} \text{ och } \begin{cases} P = y^2 - e^{\sin(x)} \\ Q = 5x + \sqrt{y^3 + 1}. \end{cases}$$

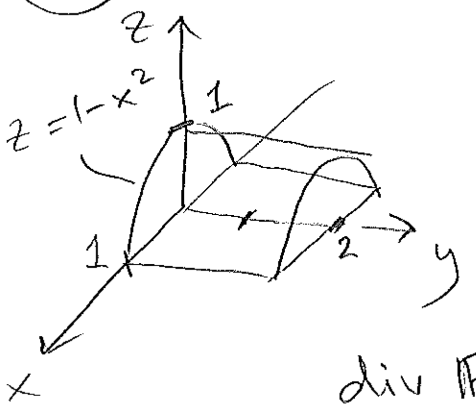
$$\text{Så } (*) = \iint_D (5 - 2y)\,dx\,dy = \{\text{polära koordinater}\} =$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (5 - 2r\sin\theta)\, r\,d\theta\,dr = 5\int_0^2 r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta -$$

$$-2\int_0^2 r^2\,dr \cdot \int_0^{2\pi} \sin\theta\,d\theta = 5 \cdot \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^2 \cdot 2\pi - 2\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 \left[\cos\theta\right]_0^{2\pi} =$$

$$= 5 \cdot 2 \cdot 2\pi - 2 \cdot \frac{8}{3} \cdot \left(-1 - (-1)\right) = \underline{20\pi}$$

6. Området ser ut så här:



Vi använder Gauss sats:

$$\iint_{\partial V} \mathbb{F}\cdot \mathbb{N}\, dS = \iiint_V \operatorname{div} \mathbb{F}\, dxdydz.$$

$$\operatorname{div} \mathbb{F} = y + 2y + 0 = 3y$$

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbb{F}\, dxdydz = \int_{-1}^{1}\int_0^2\int_0^{1-x^2} 3y\, dz\, dy\, dx =$$

$$= 3\int_{-1}^{1}\int_0^2 y\,[z]_0^{1-x^2}\, dy\, dx = 3\int_{-1}^{1}\int_0^2 y\cdot(1-x^2)\, dy\, dx =$$

$$= 3\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx\cdot\int_0^2 y\, dy = 3\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}\cdot\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 =$$

$$= 3\left(\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)\right)\cdot\frac{4}{2} = 3\left(2-\frac{2}{3}\right)\cdot 2 =$$

$$= \cancel{3}\cdot\left(\frac{6-2}{\cancel{3}}\right)\cdot 2 = \underline{\underline{8}}$$

7. a. Se boken s. 53.

b. Se boken s. 53.

c. Vi kan använda satsen som säger att om f är C^1 (dvs har kontinuerliga partiella derivator) så är den differentierbar (se s. 56 i boken)

8. Se boken s. 79.