Tentamen i MMGF20/LGMA50, 9/6 2017, 14.00-18.00
Matematiska Vetenskaper, Göteborgs universitet
Elin Götmark (070-6787423)
Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Beräkna följande gränsvärde om det existerar: (3p)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sin(x^2+y^2)}.$$

2. Vi tittar på ytan $\mathbf{r}(s,t) = (\sin(s), \cos(s)\sin(t), \cos(t))$ där $0 \le s \le 2\pi$ och $0 \le s \le 2\pi$.
   a) Ta fram en ekvation för ytans tangentplan när $(s,t) = (\pi/2, \pi/4)$. (2p)
   b) Ta fram tangentlinjen till skärningskurvan mellan ytan $\mathbf{r}(s,t)$ och ytan $2x - z^2 + y^3 = 0$, i samma punkt som i a). (2p)

3. Hitta de största och minsta värdena (om de existerar) av funktionen $f(x,y) = (x-y)e^{-2x-y}$ på området $0 \le x \le \infty$, $0 \le y \le x$. (3p)

4. Beräkna arean av den del av planet $z = 2x+2y$ som ligger inuti cylindern $x^2+y^2 = 1$. (3p)

5. Bestäm mass-centrum för kroppen K som uppfyller $x^2+y^2+z^2 \le 1$ och $x \ge 0$, $y \ge 0$ och $z \ge 0$. Densiteten är $\rho(x,y,z) = 1$. x-koordinaten för mass-centrum ges av

$$x_T = \frac{1}{m} \iiint_K x\,dxdydx,$$

   där m är K:s massa, och motsvarande för de andra koordinaterna. (3p)

6. Beräkna integralen

$$\int_\gamma y\,dx + z\,dy + x\,dz,$$

   där γ är skärningen mellan ytorna $x^2+y^2+z^2 \le 1$ och $x+y+z = 0$, orienterad motsols (counterclockwise) om vi ser på den ovanifrån. (3p)

7. Låt γ vara enhetscirkeln i planet och $\mathbf{F} = (x,y)$. Beräkna följande kurvintegral med tre olika metoder: (3p)

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

8. Låt D vara en öppen, bågvis sammanhängande mängd i $\mathbb{R}^n$, och f en $\mathcal{C}^1$-funktion definierad i D. Visa att om $\nabla f(x) = 0$ för alla $x \in D$ så är f konstant i D. (3p)