Tentamen i MMGF20/LGMA50, 22/8 2017, 14.00-18.00
Matematiska Vetenskaper, Göteborgs universitet
Elin Götmark (070-6787423)
Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Lös differentialekvationen $yf'_x + xf'_y = 0$, där $x > 0$ och $y > 0$, med hjälp av variabelbytet $u = x^2 + y^2$, $v = x^2 - y^2$. Bestäm också den lösning som uppfyller $f(2x, x) = x^2$. (3p)

2. Du vill bygga en fyrkantig låda utan lock med volymen 1 m^3. Vad ska lådan ha för dimensioner för att det ska gå åt så lite material som möjligt? (3p)

3. Vi tittar på kurvan $F(x, y) = 3y^2 + xy + x^2 = 1$.
a) I vilka punkter på kurvan går den inte att skriva som en graf där y är en funktion av x? (2p)
b) Beräkna $y'(x)$ i punkten $(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$. (2p)

4. Beräkna följande generaliserade integral om den är konvergent: (3p)
$$\iint_{\mathbb{R}^2} x^2 e^{-x^2-y^2}\, dxdy.$$
Visa annars att den är divergent.

5. Beräkna integralen
$$\iiint_K yz\, dxdydz,$$
där K är det begränsade område som innesluts av planen $z + x = 2$, $z - x = 2$, $z = 0$, $y = 0$ och $y = 1$. (3p)

6. Beräkna kurvintegralen
$$\int_\gamma x^2 y\, dx - xy^2\, dy,$$
där γ är övre halvan av cirkeln med radie 3 och centrum i origo, genomlöpt från höger till vänster. (3p)

7. Låt $\mathbf{F}$ vara ett konservativt vektorfält med potential U i ett öppet område $D \subset \mathbb{R}^2$, och låt γ vara en kurva i D som börjar i $\mathbf{a}$ och slutar i $\mathbf{b}$. Visa att (3p)
$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{b}) - U(\mathbf{a}).$$

8. a) Definiera vad som menas med en partiell derivata till en funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. (1p)
b) Visa att en funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ som är differentierbar i en punkt $x = a$ också är partiellt deriverbar i a. (2p)