Tentamen i MMGF20/LGMA50, 28/8 2018, 8.30-12.30
Matematiska Vetenskaper, Göteborgs universitet
Elin Götmark (070-6787423)
Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. a) Beräkna riktningsderivatan i punkten $(1, 2)$ av funktionen $f(x, y) = e^{x^2-y}$ i riktningen $(-1, 1)$. (1p)
   b) Bestäm funktionaldeterminanten till funktionen $\mathbf{f} \circ g$, där $g(x, y) = xy^2$ och $\mathbf{f}(t) = (t^2, t + 1)$. (2p)

2. Hitta det minsta avståndet mellan origo och planet $x+3y-2z = 4$. (Tips: minimera avståndsfunktionen.) (3p)

3. a) Låt $f(x, y) = x^2 + y^2$. I vilken punkt har ytan $z = f(x, y)$ ett tangentplan som är parallellt med planet $x+y+z = 0$? Ange också tangentplanets ekvation i punkten. (2p)
   b) Hitta en parametrisering till kurvan som ges av skärningen av ytorna $z = x^2 + y^2$ och $x + y + z = 0$. (2p)

4. Avgör om den generaliserade integralen är konvergent eller divergent:

$$\iint_D \frac{1}{x\sqrt{y}} dxdy$$

   där D är triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(1, 1)$ och $(1, 2)$. Om integralen är konvergent, ange dess värde. (3p)

5. Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_K xy \, dxdydz$$

   där K definieras av $0 \le x \le 1$, $0 \le z - 2y \le 1$ och $0 \le z \le 1$. (3p)

6. Kom ihåg att om vi sätter $(P, Q) = \frac{1}{2}(-y, x)$ kan vi beräkna areor med Greens formel. Beräkna arean av området som innesluts av kurvan $\mathbf{r}(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t))$ där $0 \le t \le 2\pi$. (3p)

7. a) Definiera vad som menas med en funktion $f(x, y)$ är differentierbar i en punkt (a, b). (1p)
   b) Bevisa att om $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är en differentierbar funktion och $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ har längd 1, så gäller att $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \nabla f \cdot \mathbf{v}$. (2p)

8. Antag att vektorfältet $\mathbf{F} = (P, Q)$ uppfyller villkoret $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ i ett område Ω i planet som saknar hål. Visa att $\mathbf{F}$ har en potential. (3p)