Lösningar till tenta 17/3 2015

MMGF20/LGMA50

Elin Götmark

1. Vi hittar först de stationära punkterna, dvs de punkter där $\nabla f = \mathbf{0}$.

$\nabla f = (4x^3 - 4y, 4y^3 - 4x) = \mathbf{0}$ ger

$$\begin{cases} x^3 - y = 0 \\ y^3 - x = 0. \end{cases}$$

Sätt in $y = x^3$ i ekv (2). Då får vi

$x^9 - x = 0 \iff x(x^8 - 1) = 0.$

De reella lösningarna är då $x = 0$, $x = \pm 1$, vilket ger $(0,0)$, $(1,1)$ och $(-1,-1)$.

Vi Taylorutvecklar kring dessa punkter; då behöver vi andraderivatorna:

$f''_{xx} = 12x^2 \quad f''_{xy} = -4 \quad f''_{yy} = 12y^2.$

$\underline{(0,0)}$: Andragradsdelen av Taylorutvecklingen är $Q(h,k) = -8hk$, som är indefinit. Då är $(0,0)$ en <u>sadelpunkt</u>.

$\underline{(1,1)}$: $Q(h,k) = 12h^2 - 8hk + 12k^2 =$

$= 12\left(h^2 - \frac{2}{3}hk + k^2\right) = 12\left(\left(h - \frac{1}{3}k\right)^2 - \frac{k^2}{9} + k^2\right) =$

$= 12\left(\left(h - \frac{1}{3}k\right)^2 + \frac{8}{9}k^2\right)$ som är positivt definit.

Då är $(1,1)$ en <u>minpunkt</u>.

$\underline{(-1,-1)}$: Samma som $(1,1)$.

(2.) Vi byter variabler i ekvationen mha kedjeregeln:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y} = -y\frac{\partial f}{\partial s}$$

Ekvationen blir då

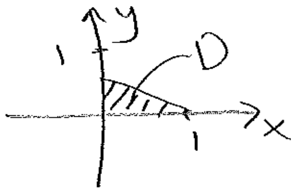
$$xy\left(\cancel{\frac{\partial f}{\partial s}} + \frac{\partial f}{\partial t}\right) - xy\cancel{\frac{\partial f}{\partial s}} = y$$

$$x\frac{\partial f}{\partial t} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{t}$$

Integration m.a.p t ger $f(s,t) = \ln(t) + g(s)$, dvs $\underline{\underline{f(x,y) = \ln(x) + g\left(x - \frac{y^2}{2}\right)}}$, där g är vilken funktion som helst.

(3.) Områdets skärning med xy-planet:



Ovanför detta område ligger grafen $z = y^2$, och vi söker volymen under den ytan. Volymen är: $\iint_D \left(\int_0^{y^2} 1\,dz\right)dx\,dy =$

$$= \iint_D y^2\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^{\frac{1-x}{2}} y^2\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{\frac{1-x}{2}} dx =$$

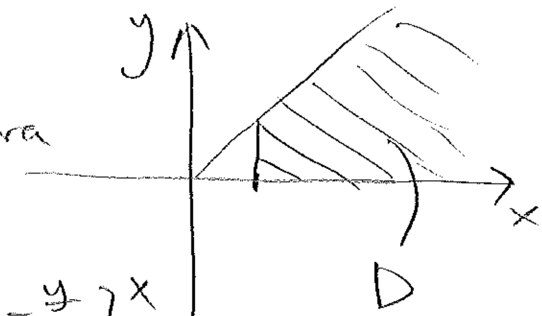
$$= \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{3\cdot 2^3} - 0\,dx = \frac{1}{24}\left[-\frac{(1-x)^4}{4}\right]_0^1 =$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{96}}}$$

4. Sätt $F(x,y,z) = xe^z + zy^2 + \sin(x) = 0$.
Enligt implicita funktionssatsen så kan nivåytan skrivas som en graf $z = f(x,y)$ kring punkten $(0,1,0)$ om $F'_z(0,1,0) \neq 0$.
Vi kollar detta: $F'_z = xe^z + y^2$, så $F'_z(0,1,0) = 0 + 1^2 \neq 0$. Svaret är alltså ja. Vi vill räkna ut $f'_x(0,1,0)$ och $f'_y(0,1,0)$, och gör det genom implicit derivering: $F(x,y,z) = 0$ kan skrivas som $xe^{f(x,y)} + f(x,y) \cdot y^2 + \sin(x) = 0$. (*)
Derivera (*) m.a.p. x: $1 \cdot e^{f(x,y)} + xf'_x(x,y)e^{f(x,y)} +$
$+ f'_x(x,y) \cdot y^2 + \cos(x) = 0$.
Sätt in $(x,y) = (0,1)$ och $f(0,1) = 0$:
$e^0 + 0 + f'_x(0,1) \cdot 1^2 + \cos(0) = 0$
$f'_x(0,1) + 2 = 0$
$\underline{\underline{f'_x(0,1) = -2}}$

Derivera (*) m.a.p. y: $xf'_y(x,y)e^{f(x,y)} + f'_y(x,y) \cdot y^2 +$
$+ 2yf(x,y) = 0$
Sätt in $(x,y) = (0,1)$ och $f(0,1) = 0$:
$f'_y(0,1) \cdot 1^2 = 0$
$\underline{\underline{f'_y(0,1) = 0}}$

5. Vi ritar först upp D:



Det verkar lättast att integrera m.a.p. y först:

$$\int_1^\infty \int_0^x \frac{1}{x^3} e^{-\frac{y}{x}}\, dy\, dx = \int_1^\infty \left[-\frac{1}{x^2} e^{-\frac{y}{x}} \right]_0^x dx =$$

$$= \int_1^\infty -\frac{1}{x^2} e^{-1} + \frac{1}{x^2}\, dx = \left(1 - \frac{1}{e}\right) \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx =$$

$$= \left(1-\frac{1}{e}\right) \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^R = \left(1-\frac{1}{e}\right) \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1}{R} + 1 \right) =$$

$$= \underline{\underline{\left(1-\frac{1}{e}\right)}}.$$ Integralen är alltså konvergent, och detta är dess värde.

6. Vi använder Stokes sats. Ytan Y blir då den del av ytan $z = y^2 - x^2$ som ligger ovanför cirkelskivan $x^2 + y^2 = 1$. Då får vi

$$\int_\gamma \mathbb{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_Y (\text{rot}\, \mathbb{F}) \cdot \mathbb{N}\, dS.$$ Vi får också:

$$\text{rot}\, \mathbb{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x^2 y \\ x^3/3 \\ xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 - x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi parametriserar ytan med standardparametriseringen för en graf:

$\mathbb{X}(s,t) = (s, t, t^2 - s^2)$. Då blir

$\mathbb{X}'_s = (1, 0, -2s)$ och $\mathbb{X}'_t = (0, 1, 2t)$, och

$$\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2s \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s \\ -2t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi vet att $\mathbf{N}\,dS = (\mathbf{r}'_s \times \mathbf{r}'_t)\,ds\,dt$. Då blir

$$\iint_Y (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\,dS = \iint_{s^2+t^2 \le 1} (x \cdot 2s + y \cdot 2t)\,ds\,dt =$$

$$= 2\iint_{s^2+t^2\le 1} s^2+t^2\,ds\,dt = \{\text{polära koord.}\} =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\, r\,dr\,d\theta = 4\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 =$$

$$= \underline{\underline{\pi}}$$

7. a. En potential till $\mathbf{F}$ i D är en funktion $u(x,y)$ sådan att $\nabla u = \mathbf{F}$ i D.

b. Nej. Vi vet enligt sats att om $\mathbf{F}$ är konservativt i $\mathbb{R}^2$ så är $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ för alla slutna kurvor γ.

c. Om u finns ska den uppfylla

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = x^2 e^y + \cos(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = x^2 e^y + 1. \end{cases}$$

Från ekv. (1) får vi $u(x,y) = \dfrac{x^3}{3} e^y + \sin(x) + f(y)$.

Från ekv. (2) får vi $u(x,y) = x^2e^y + y + g(x)$.
Det finns ingen sätt att välja f och g på som gör att dessa kan bli lika, alltså finns ingen potential.

<u>Alt lösning:</u> $$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2xe^y$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = x^2e^y$$

Dessa är inte lika, alltså kan ingen potential finnas.

(8.) Se boken sid 76.