Tentamen i MMGF20/LGMA50, 19/3 2019, 14.00-18.00
Matematiska Vetenskaper, Göteborgs universitet
Elin Götmark (070-6787423)
Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Bestäm följande gränsvärde, om det existerar: (3p)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+3y^4}.$$

2. Maximera funktionen $f(x,y) = 200x^{2/3}y^{1/3}$ med bivillkoret $20x + 170y = 1000$, där $x \geq 0$ och $y \geq 0$. (3p)

3. Lös differentialekvationen $xe^x f'_x + ye^x f'_y = x$ genom att använda variabelbytet $s = x$, $t = x/y$, där $x > 0$ och $y > 0$. Bestäm också den lösning som uppfyller villkoret $f(1, y) = -1/e + 2y$. (3p)

4. Räkna ut arean av den del av ytan $z = xy$ som uppfyller $x^2 + y^2 \leq 1$. (3p)

5. Räkna ut den generaliserade integralen

$$\iint_D xe^{-x^2-y}\,dxdy$$

   där $D = \{(x,y) : x > 0, y > x^2\}$ (om den existerar). (3p)

6. Låt ytan Y vara den sneda kon utan botten som består av alla räta linjesegment vars ena ändpunkt är $(1,0,3)$ och vars andra ändpunkt ligger på cirkeln $x^2 + y^2 = 4$ i planet $z = 0$. Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (e^{-y^2-z^2}, e^{-x^2-z^2}, e^{-x^2-y^2})$$

   upp genom ytan Y. (3p)

7. (a) Hitta en potential till vektorfältet $(P,Q) = (2x^3y^4 + x, 2x^4y^3 + y)$ i $\mathbb{R}^2$ eller motivera varför potentialen inte existerar. (2p)

   (b) Antag att vektorfältet $\mathbf{F} = (P,Q)$ uppfyller villkoret $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ i ett område Ω i planet som saknar hål. Visa att $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ för alla slutna kurvor γ i Ω. (2p)

8. Låt D vara en öppen, bågvis sammanhängande mängd i $\mathbb{R}^n$, och f en $\mathcal{C}^1$-funktion definierad i D. Visa att om $\nabla f(x) = 0$ för alla $x \in D$ så är f konstant i D. (3p)