Tentamen i MMGF20/LGMA50, 27/8 2019, 8.30-12.30
Matematiska Vetenskaper, Göteborgs universitet
Elin Götmark (070-6787423)
Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Avgör om det finns någon punkt på ytan $z = 2x^2 - 3y^2$ där tangentplanet är parallellt med planet $8x + 12y + z = 4$. Ange i så fall tangentplanet i den/de punkterna. (3p)

2. Låt $F(x, y) = xy^2 - xy$.
   (a) Avgör kring vilka punkter som kurvan $F(x, y) = 1$ inte kan skrivas som en graf där $y = y(x)$. (1,5p)
   (b) Beräkna $y'(x)$ när $x = 1$. Välj den del av kurvan där y-koordinaten är positiv. (2,5p)

3. Låt $f(x, y) = x^2y + y^3 - y$ och D vara området som begränsas av $x = 1$, $y = 0$ och $y = x + 1$. Hitta det största och minsta värdet av f på D (om de existerar). (3p)

4. Kroppen K begränsas av planen $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$, $z = 1$ och $1+x+y-z = 0$. Beräkna K:s massa, om densiteten är $\rho(x, y, z) = 2x-1$. (3p)

5. Beräkna volymen av kroppen K som ges av $x^2 + 4y^2 + z^2/9 \leq 1$. (Om du kommer ihåg formeln för volymen av en sådan kropp får du inte använda den, utan du ska räkna ut en integral.) (3p)

6. Låt $\mathbf{F} = (z^2, y^2, x)$ och låt γ vara kurvan som består av triangeln som går från $(0, 0, 1)$ till $(0, 1, 0)$, sedan till $(0, 0, 1)$, och tillbaka till första punkten. Beräkna
$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$
med hjälp av Stokes sats. (3p)

7. (a) Definiera vad som menas med riktningsderivatan $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a})$ av en funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i punkten $\mathbf{a}$ och med avseende på enhetsvektorn $\mathbf{v}$. (1p)
   (b) Bevisa att $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}$ om f är differentierbar. (2p)

8. Låt $\mathbf{F}$ vara ett konservativt vektorfält med potential U i ett öppet område $D \subset \mathbb{R}^2$, och låt γ vara en kurva i D som börjar i $\mathbf{a}$ och slutar i $\mathbf{b}$. Visa att (3p)
$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{b}) - U(\mathbf{a}).$$