Lösningar till tenta i MMGF20/LGMA50 22/8 2017, Elin Götmark.

(1.) Vi vill lösa $yf'_x + xf'_y = 0$, där $x>0, y>0$.

Sätt $\begin{cases} u = x^2+y^2 \\ v = x^2-y^2 \end{cases}$. Med kedjeregeln får vi

$$f'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = 2x f'_u + 2x f'_v,$$

$$f'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y = 2y f'_u - 2y f'_v,$$

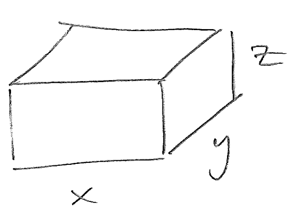
så $yf'_x + xf'_y = y(2x f'_u + \cancel{2x f'_v}) + x(2y f'_u - \cancel{2y f'_v}) =$
$= 4xy f'_u = 0$. Eftersom $x>0, y>0$ kan vi dela med dem och få $f'_u = 0$. Då är

$$f = g(v) = \underline{\underline{g(x^2-y^2)}}.$$

Om $f(2x,x) = x^2$ får vi $g((2x)^2 - x^2) =$
$= g(4x^2-x^2) = g(3x^2) = x^2$. Då är $g(t) = \frac{t}{3}$,
så $f = g(x^2-y^2) = \underline{\underline{\frac{x^2-y^2}{3}}}$.

(2.) Lådans volym är $x \cdot y \cdot z = 1\ m^3$, och arean av materialet som går åt är

$$xy + 2yz + 2xz = f(x,y,z).$$



Lösning 1: Vi vill hitta minsta värdet av f under bivillkoret $g(x,y,z) = xyz = 1$.

Uppenbart är $x>0, y>0, z>0$.

$\nabla f = (y+2z, x+2z, 2y+2x)$

$\nabla g = (yz, xz, xy)$. $\nabla f = \lambda \cdot \nabla g$ ger

$$\begin{cases} y + 2z = \lambda yz \\ x + 2z = \lambda xz \\ 2y + 2x = \lambda xy \\ xyz = 1 \end{cases}$$

Lös ut λ ur (1) och sätt in i (2) och (3):

$$\lambda = \frac{1}{z} + \frac{2}{y}.$$

$$\begin{cases} x + 2z = x + \frac{2xz}{y} \\ 2y + 2x = \frac{xy}{z} + 2x \\ xyz = 1 \end{cases}$$

Lös ut z ur (3) och sätt in i (1) och (2):

$$z = \frac{1}{xy}$$

$$\begin{cases} x + \frac{2}{xy} = x + \frac{2}{y^2} \\ 2y + 2x = x^2y^2 + 2x \end{cases}$$

(1) ger $\frac{2}{xy} = \frac{2}{y^2} \Rightarrow \underline{\underline{x = y}}$

Vi sätter in i (2): $2x + 2x = x^4 + 2x \Rightarrow x^4 = 2x$

$\Rightarrow x^3 = 2$, dvs $\underline{\underline{x = 2^{1/3},\ y = 2^{1/3},\ z = 2^{-2/3}}}$.

Detta är en kandidat till att vara minimum.
Vad händer när vi rör oss bort från origo?

Vi sätter in $z = \frac{1}{xy}$ i f och får

$f(x,y,z) = h(x,y) = xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}$. Det är uppenbart att $h \to \infty$ när $x^2 + y^2 \to \infty$. Alltså måste lådans dimensioner vara $2^{1/3} \times 2^{1/3} \times 2^{-2/3}$.

<u>Lösning 2</u>: Jobba istället med $h(x,y)$ direkt.

Sätt $h'_x = h'_y = 0$ osv.

3. a. Detta går inte om $F'_y = 0$, dvs $6y + x = 0$, dvs $x = -6y$. Sätt in i kurvans ekvation: $3y^2 - 6y^2 + 36y^2 = 1$, dvs $33y^2 = 1$, alltså $y = \pm \frac{1}{\sqrt{33}}$. Punkterna där det inte går är alltså $\underline{\left(-\frac{6}{\sqrt{33}}, \frac{1}{\sqrt{33}}\right)}$ och $\underline{\left(\frac{6}{\sqrt{33}}, -\frac{1}{\sqrt{33}}\right)}$.

b. Om $y = y(x)$ vill vi derivera $3y(x)^2 + xy(x) + x^2 = 1$ implicit, dvs

$$6y(x) \cdot y'(x) + y(x) + xy'(x) + 2x = 0$$

Sätt in $x = 0$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$:

$$6 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot y'(0) + \frac{1}{\sqrt{3}} = 0 \iff \underline{\underline{y'(0) = -\frac{1}{6}}}$$

4. $$\iint_{\mathbb{R}^2} x^2 e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \{\text{polära koordinater}\} =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2\theta\, e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = \int_0^\infty r^3 e^{-r^2} dr \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos^2\theta}_{= \frac{1+\cos 2\theta}{2}}\,d\theta =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l|l} \text{i } r\text{-integralen, sätt} & r = 0 \iff u = 0 \\ u = r^2,\ du = 2r\,dr, & r \to \infty \iff u \to \infty \end{array} \right\} =$$

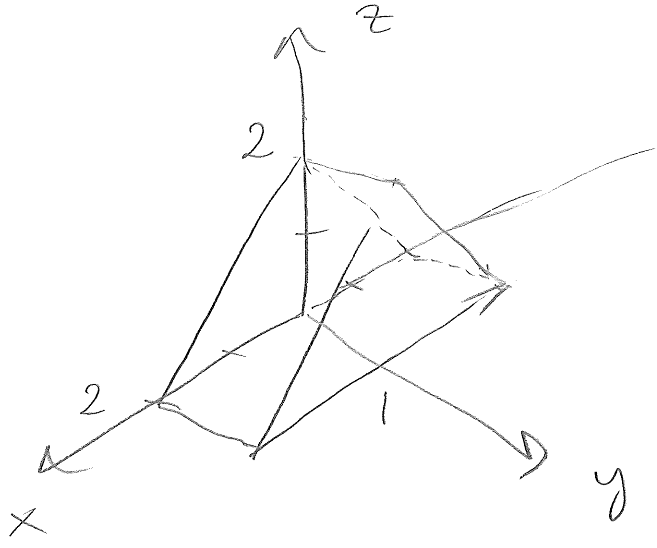
$$= \int_0^\infty \frac{1}{2} u e^{-u}\,du \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 + \underbrace{\cos 2\theta) \,d\theta}_{\text{blir noll pga löper över två perioder}} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{partiell integration} \\ \text{av } u\text{-integralen} \end{array} \right\} = \left(\frac{1}{2}\left[-ue^{-u}\right]_0^\infty + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-u}\,du \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\underbrace{-\lim_{u\to\infty} ue^{-u}}_{=0} + 0 + \left[-e^{-u}\right]_0^\infty \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\underbrace{\lim_{u\to\infty} -e^{-u}}_{=0} + e^0 \right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}} \quad \text{(den är alltså konvergent.)}$$

5. Området ser ut så här:



$$\iiint_K yz\,dx\,dy\,dz =$$

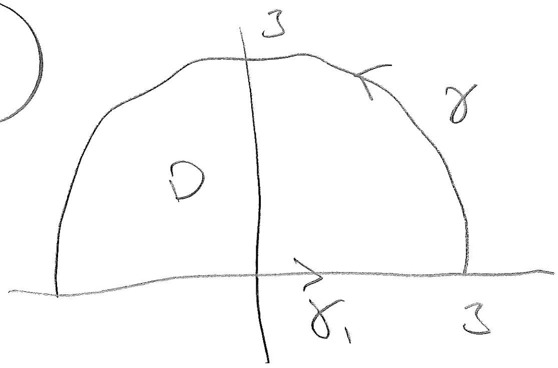
$$= \int_0^1 \int_0^2 \int_{-2+z}^{2-z} yz\,dx\,dz\,dy =$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 yz\left(2-z-(-2+z)\right)dz\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 yz(4-2z)\,dz\,dy = 2\int_0^1 y\,dy \int_0^2 2z - z^2\,dz =$$

$$= \left[y^2\right]_0^1 \left[z^2 - \frac{z^3}{3}\right]_0^2 = 1\cdot\left(4-\frac{8}{3}\right) = \frac{12-8}{3} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

(6.)



Integralen verkar kunna bli svår om vi parametriserar den direkt, så vi sluter till området med γ_1 och använder Greens formel. Orienteringen stämmer.

$$\int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D \frac{\partial}{\partial x}(-xy^2) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y)\,dx\,dy - \int_{\gamma_1} \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r} =$$

$$= \iint_D -y^2 - x^2\,dx\,dy - \int_{\gamma_1} \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r}.$$

Vi parametriserar γ_1 med $(t, 0)$, $-3 \le t \le 3$.

Då blir $\mathbb{F} = (0,0)$, så $\int_{\gamma_1} \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$.

$$-\iint_D x^2 + y^2\,dx\,dy = -\int_0^\pi\int_0^3 r^2\cdot r\,dr\,d\theta = -\pi\cdot\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^3 =$$

$$= \underline{\underline{-\frac{81\pi}{4}}}$$ vilket också är värdet på $\int_\gamma \mathbb{F}\cdot d\mathbf{r}$.

(7.) Se boken

(8.) Se boken