Tentamen i Naturvetarmatematik B MMGK20
Linjär Algebra Fredag 30 maj 2008 8.30 – 13.30

Svar eller lösningar

1. Bestäm baser för kolonnrum respektive nollrum till matrisen

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 6 & 4 & 0 \\ 3 & -6 & 8 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$ **(3p)**

Svar: $A \succ\prec \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ *utgör en bas för kolonnrummet*

och $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ *en bas för nollrummet*

2. Lös med hjälp av diagonalisering följande system av differentialekvationer:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 3x_2 \\ x_2' = 3x_1 + x_2 \end{cases} \qquad \begin{aligned} x_1(0) &= 2 \\ x_2(0) &= 0 \end{aligned}$$ **(4p)**

Lösning: systemet skrivs $x' = Ax$ *där* $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. *A diagonaliseras till* $A = PDP^{-1}$

där $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *och* $D=\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. *Genom att införa en ny variabel y,* $y = P^{-1}x$ *får* *man* $y' = Dy$ *med lösningar* $\begin{cases} y_1 &= C_1 e^{-4t} \\ y_2 &= C_2 e^{2t} \end{cases}$. *Med hjälp av begynnelsevillkoren får man till slut att* $\begin{cases} x_1 &= e^{-4t} + e^{2t} \\ x_2 &= e^{-4t} - e^{2t} \end{cases}$

3. **a)** Bestäm den räta linje som enligt minsta kvadratmetoden bäst ansluter till punkterna $(-2,1)$, $(1,2)$, $(5,3)$ och $(-2,4)$

Lösning: sätt $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ *och* $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. *Vi söker* $\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}$ *som är lösning till*

$A^t A \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} = A^t b$. *Efter lite räkningar blir* $\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 34 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{66} \begin{pmatrix} 163 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) Att lösa systemet $\begin{cases} x + y = a \\ x + y = b \\ x + y = c \end{cases}$ med hjälp av minsta kvadratmetoden innebär väsentligen att man ersätter de tre ekvationerna med en. Vilken?

(*a*, *b* och *c* är parametrar som skall ingå i svaret.) **(4p)**

Svar: $x + y = \dfrac{a+b+c}{3}$

4. Matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ har ett egenvärde som man upptäcker utan några räkningar. Vilket?

Gör en ortogonal diagonalisering av *A*.

Låt *B* vara en $n \times n$-matris där varje element är $=1$.
Om $B = PDP^t$, där *P* är ortogonal och *D* diagonal, vad blir *D*?

Lösning: det uppenbara egenvärdet är 0 vars egenrum består av lösningar till ekvationen $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. *Ur denna härleder man två ortogonala egenvektorer, till exempel* $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ *och* $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Eftersom A är symmetrisk måste en egenvektor tillhörande det andra egenvärdet vara ortogonal mot dessa bägge, till exempel $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Man ser lätt att denna egenvektor har egenvärdet 3. Man får därför* $A = PDP^t$ *med* $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ *och*

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Vad beträffar det allmänna problemet med B kommer denna i analogi med räkningarna ovan att få ett egenvärde 0 med multiplicitet n-1 och ett sista egenvärde n. D kommer därför att bestå av idel nollor förutom ett enda element längs huvuddiagonalen som blir $= n$

5. Bestäm basbytesmatrisen P från standardbasen B i $\Re^2$ till den bas B' som uppstår då B speglas i linjen $x + y = 0$.

Bestäm koordinaterna för vektorn $(1,1)$ i basen B'. **(3p)**

Svar: $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *och* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}_{B'}$

6. Låt T vara en linjär avbildning $P_2 \to P_2$ sådan att
$T(a + bx + cx^2) = (a-b) + (b-c)x + (c-a)x^2$

Beskriv kärnan av T. Ange en bas för kärnan. Ange även dimensionen.

Ange dimensionen för värdemängden (”Range”).

(P_2 *står som vanligt för rummet av polynom av grad* ≤ 2) **(3p)**

Lösning: kärnan består av alla polynom $a+bx+cx^2$ *där* $a=b=c$. *Kärnan blir därför endimensionell med basen* $1+x+x^2$. *Dimensionen för värdemängden blir* $=2$

7. En matris *A* kallas ***nilpotent*** om $A^n = 0$ för något positivt heltal *n.*

Exempel: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *och* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *är nilpotenta.*

a) Bestäm alla 2×2–matriser som är både nilpotenta och diagonaliserbara.
Ledning: visa till exempel först att bägge egenvärdena måste vara $=0$

Svar: eftersom A är diagonaliserbar är $A = PDP^{-1}$ *och därför* $A^n = PD^nP^{-1}$.
Eftersom $A^n = 0$ *blir också* $D^n = 0$ *och det följer att* $D=0$, *det vill säga att bägge egenvärdena är* $=0$ *Men den enda diagonaliserbara matrisen med bägge egenvärdena* $=0$ *är nollmatrisen.*

b) Ange en nilpotent 2×2–matris där alla element är $\neq 0$

Svar: till exempel $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$