Kortfattade lösningar till Tentamen i Naturvetarmatematik B, Linjär Algebra 16 januari 2008

1. Bestäm ON-baser för kolonnrum respektive nollrum till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -4 \\ 7 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösningar: man reducerar först A: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -4 \\ 7 & -6 & 2 \end{pmatrix} \succ\prec \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -19 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Lösningen*

till $Ax = 0$ *blir* $\begin{cases} x_1 = 16t \\ x_2 = 19t \\ x_3 = t \end{cases}$ *vilket ger en enda ortonormerad basvektor för*

nollrummet, $\frac{1}{\sqrt{618}}\begin{pmatrix} 16 \\ 19 \\ 1 \end{pmatrix}$. *De två första kolonnerna i A bildar en bas som kan*

ortonormeras med Gram-Schmidt till $\frac{1}{\sqrt{75}}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ *samt* $\frac{1}{\sqrt{50}}\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. Lös ekvationssystemet $Ax = b$ där $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ och $b = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Lös sedan samma system med hjälp av minsta kvadratmetoden.
Kan man vara säker på att lösningarna alltid blir desamma? Motivera!

Lösning: $Ax = b$ *löses med elimination som ger* $x = (1,0,3)$
Minsta kvadratlösningen ges av $A^t Ax = A^t b$, *och även här får man* $x = (1,0,3)$.
Så måste det vara när $Ax = b$ *har en entydig lösning eftersom minsta kvadratlösningen är det x som gör att avståndet mellan Ax och b så litet som möjligt.*

3. Bestäm matrisen till den avbildning som gör att triangeln T med hörn i punkterna $(1,1)$, $(1,4)$ och $(4,1)$ avbildas på triangeln $\hat{T}$ med hörn i $(3,5)$, $(9,17)$ och $(6,8)$.

Beräkna arean av T.
Beräkna med hjälp av detta arean av $\hat{T}$.

Lösning: på grund av linearitet kommer $4(1,1)-(1,4)=(3,0)$ *avbildas på* $4(3,5)-(9,17)=(3,3)$ *och på samma sätt* $4(1,1)-(4,1)=(0,3)$ *på* $4(3,5)-(6,8)=(6,12)$.

Det innebär att avbildningens matris blir $S=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3 & 6\\ 3 & 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$.

Arean av T räknar man lätt ut till $\frac{9}{2}$ *och arean av* $\hat{T}$ *blir* $\det S = 2$ *gånger så stor, alltså* 9.

4. Låt $M=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$

Ange villkor på elementen a, b, c och d som garanterar att M endast har reella egenvärden.
Verifiera att symmetriska matriser uppfyller villkoren.
Ange en icke-symmetrisk matris som uppfyller villkoren.

Lösning: Egenvärdena till M är lösningar till ekvationen $\det(M-\lambda I)=0$, *det vill säga* $\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=0$. *Denna ekvation har reella rötter om och endast om* $(a+d)^2 \geq 4(ad-bc)$.

M är symmetrisk exakt när $b=c$ *vilket gör att villkoret ovan kan skrivas* $(a-d)^2+4b^2 \geq 0$ *som ju är uppfyllt för alla a, b och d.*

Till sist är till exempel $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ *en icke-symmetrisk matris med reella egenvärden.*

5. Visa att matrisen $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ k^3 & -3k^2 & 3k\end{pmatrix}$ inte är diagonaliserbar för något reellt värde på konstanten *k*.

Lösning: vi beräknar först egenvärdena till A: $\det(A-\lambda I)=0 \quad \Leftrightarrow \quad (k-\lambda)^3=0$. *A har alltså ett egenvärde,* $\lambda = k$ *, av multiplicitet* 3.
För att A skall kunna vara diagonaliserbar måste det finnas tre linjärt oberoende egenvektorer men eftersom $A-\lambda I \neq 0$ *kan nollrummet till den matrisen som högst ha dimension 2.*

6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska:

a) Om AA^t är inverterbar är också *A* inverterbar.

b) Om $A+B$ är symmetrisk måste både *A* och *B* vara symmetriska.

(*A* och *B* är lika stora kvadratiska matriser.)

Lösning: a) Ja, ty $\det(AA^t)=(\det A)^2$*, så* $\det(AA^t)\neq 0 \Rightarrow (\det A)\neq 0$

b) Nej, ta till exempel $A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ *och* $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$