LÖSNINGAR till

Tentamen i Naturvetarmatematik B MMGK20 (MAN 120)
Linjär Algebra Lördag 2 juni 2007 8.30 – 13.30
Telefonvakt: Georgios Foufas, 076 – 272 1861

1. Bestäm ON-baser för kolonnrum respektive nollrum till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -8 & 16 \\ -1 & 2 & 5 & -9 \end{pmatrix}$$ **(4p)**

Lösning: genom radreducering får man $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ varav följer att de två första kolonnerna i A utgör en bas för kolonnrummet. Gram-Schmidt ger ON-basen:
$\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{\sqrt{219}}\begin{pmatrix} 13 \\ 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$.

Nollrummet hittar man genom att lösa $Ax = 0$ som ger $\begin{cases} x_1 & = & 3s - 7t \\ x_2 & = & t - s \\ x_3 & = & s \\ x_4 & = & t \end{cases}$. Även här

använder man Gram-Schmidt som ger svaret $\left\{ \frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

2. Låt $A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -9 & -8 \end{pmatrix}$. Beräkna A^n där n är ett positivt heltal. **(4p)**

Lösning: Diagonalisera A! Egenvärdena blir 1 och -2, med egenvektorer $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ respektive $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Välj alltså $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ vilket gör att $P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Följaktligen blir $A^n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

3. Bestäm för varje värde på konstanten s antalet lösningar till det linjära ekvationssystemet $Ax = b$ där $A = \begin{pmatrix} 1 & s & 4 \\ s & 1 & 2 \\ 2 & s & 8 \end{pmatrix}$ och $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **(4p)**

Lösning: Man beräknar först determinanten och får $\det A = 2s(1-2s)$. Man behöver således lösa systemet för $s = 0$ respektive $s = \frac{1}{2}$.
Vanlig eliminering ger att systemet har oändligt många lösningar för $s = 0$ och att det saknas lösning för $s = \frac{1}{2}$. För övriga värden på s finns förstås en entydig lösning.

4. Ange minstakvadratlösningen till systemet

$$\begin{cases} 3x & - & y & = & 2 \\ & & 2y & = & 1 \\ -2x & + & y & = & -1 \\ x & + & 5y & = & 1 \end{cases}$$

(4p)

Lösning: Om systemet skrivs på matrisform, $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b$, ges minstakvadratlösningen av $A^t A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^t b$. Detta system har lösningen $\begin{cases} x & = & \frac{9}{14} \\ y & = & \frac{4}{31} \end{cases}$. Man kan även utnyttja att kolonnerna i A är ortogonala och i stället beräkna projektionen av b på A:s kolonnrum.

5. Låt F vara en linjär avbildning från $\Re^2$ till $\Re^2$ sådan att $F\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ och $F\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

Låt vidare T vara en triangel vars hörn genom F avbildas på $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ respektive $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$. Beräkna arean av T. **(4p)**

Lösning: Man får lätt avbildningens matris f till $\begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$. Arean av den avbildade triangeln är $=1$, och $\det f=3$, så arean av T blir $=\dfrac{1}{3}$

6. **a)** Visa att om matrisen A är inverterbar och diagonaliserbar är även A^{-1} diagonaliserbar.

Lösning: Eftersom A är diagonaliserbar är $A=PDP^{-1}$. Det följer att $A^{-1}=\left(PDP^{-1}\right)^{-1}=PD^{-1}P^{-1}$ där D^{-1} existerar eftersom en inverterbar matris inte kan ha egenvärdet $=0$.

b) En stokastisk matris M är en matris där varje element är ≥ 0 och där summan av elementen i varje kolonn blir $=1$. Exempel: $M=\begin{pmatrix}0.6 & 0.2 & 0.5\\0.1 & 0.3 & 0.5\\0.3 & 0.5 & 0\end{pmatrix}$.

Visa att en stokastisk matris har egenvärdet 1.

(Ledning: betrakta M-I; vad gäller för kolonnerna i denna matris?)

Lösning: I matrisen *M-I* är summan av elementen i varje kolonn $=0$. De ligger sålunda alla i ett underrum av dimension strängt mindre än n, där n är antalet kolonner. *M-I* är därför singulär och påståendet är visat.

c) Låt $Ax=b$ vara ett linjärt ekvationssystem med sju ekvationer och sex obekanta. Kan det finnas något högerled b sådant att systemet har en entydig lösning? Kan systemet vara sådant att det finns entydig lösning för ***varje*** högerled?

(5p)

Lösning: Ja, om kolonnerna i A är linjärt oberoende och $b \in Col\ A$

Nej, eftersom det bara finns sex kolonner är kolonnrummet ett äkta underrum av $\Re^7$