Tentamen i Naturvetarmatematik B MMGK20
Linjär Algebra Fredag 30 maj 2008 8.30 – 13.30
Telefonvakt: Peter Lindroth, 076 – 272 1861

Motivera alla lösningar noggrant!

1. Bestäm baser för kolonnrum respektive nollrum till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 6 & 4 & 0 \\ 3 & -6 & 8 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

(3p)

2. Lös med hjälp av diagonalisering följande system av differentialekvationer:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 3x_2 \\ x_2' = 3x_1 + x_2 \end{cases} \qquad \begin{aligned} x_1(0) &= 2 \\ x_2(0) &= 0 \end{aligned}$$

(4p)

3. **a)** Bestäm den räta linje som enligt minsta kvadratmetoden bäst ansluter till punkterna $(-2,1)$, $(1,2)$, $(5,3)$ och $(-2,4)$

b) Att lösa systemet $\begin{cases} x + y = a \\ x + y = b \\ x + y = c \end{cases}$ med hjälp av minsta kvadratmetoden innebär väsentligen att man ersätter de tre ekvationerna med en. Vilken?

(a, b och c är parametrar som skall ingå i svaret.) **(4p)**

4. Matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ har ett egenvärde som man upptäcker utan några räkningar. Vilket?

Gör en ortogonal diagonalisering av A.

Låt B vara en $n \times n$-matris där varje element är $= 1$.
Om $B = PDP^t$, där P är ortogonal och D diagonal, vad blir D?

(4p)

5. Bestäm basbytesmatrisen P från standardbasen B i $\Re^2$ till den bas B' som uppstår då B speglas i linjen $x + y = 0$.

Bestäm koordinaterna för vektorn $(1,1)$ i basen B'. **(3p)**

6. Låt T vara en linjär avbildning $P_2 \to P_2$ sådan att
$T(a + bx + cx^2) = (a - b) + (b - c)x + (c - a)x^2$

Beskriv kärnan av T. Ange en bas för kärnan. Ange även dimensionen.

Ange dimensionen för värdemängden (”Range”).

(*P_2 står som vanligt för rummet av polynom av grad* ≤ 2) **(3p)**

7. En matris A kallas ***nilpotent*** om $A^n = 0$ för något positivt heltal n.

Exempel: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *och* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *är nilpotenta.*

a) Bestäm alla 2×2–matriser som är både nilpotenta och diagonaliserbara.
Ledning: visa till exempel först att bägge egenvärdena måste vara $= 0$

b) Ange en nilpotent 2×2–matris där alla element är $\neq 0$

(4p)