Resurscentrums matematikleksaker

Aktiviteter för barn och vuxna

Innehåll

1 Bygga lutande torn som inte faller **2**

2 Om konsten att vinna betingat godis i spel **5**

3 Den snåle grosshandlarens våg **6**

4 Tornen i Hanoi **8**

5 Bygg möbler och utnyttja resurser på bästa sätt **10**

6 Först till 20 **13**

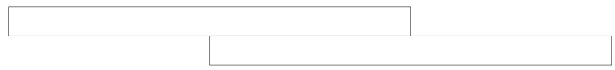
1 Bygga lutande torn som inte faller

Säg att du staplar träplattor på följande sätt:

Hur långt åt sidan kan du komma innan stapeln faller om du har hur många plattor som helst till ditt förfogande? Börjar man stapla "lite på måfå" märker man snart att det är svårt att nå så långt. Man märker kanske också att när stapeln faller börjar oftast fallet i botten.

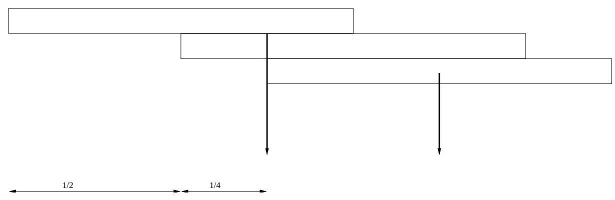
Om man vill veta hur långt man kan stapla i sidled är det en bra ide att först fundera ut hur man gör för att stapla optimalt. Enkel fysik säger oss att tornet faller när den sammanlagda tyngdpunkten ovanför en given platta hamnar utanför kanten på den givna plattan. För varje platta vi lägger på får vi alltså ett till tyngdpunktsproblem att lösa. Det som komplicerar saken är att den nya plattan också ändrar på alla de undre tyngdpunktproblemen. Att ställa upp en matematisk modell för allt detta går, men det blir mycket, mycket svårt att få ut någon information som berättar för oss hur vi skall stapla optimalt.

Istället för att tänka på det här sättet kan man nu göra något mycket smart som mer har med "ren problemlösning" att göra än med matematik. Tricket är att börja stapla uppifrån och sedan stapla "så optimalt det går" nedåt. Varje ny platta ger fortfarande ett nytt tyngdpunktsproblem, men inget av problemen ovanför påverkas. Tyngdpunkten hos en platta ligger förstås i mitten och därför är det bäst att stapla de första två plattorna på följande sätt

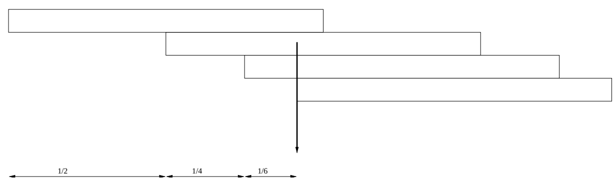


Vi vill nu lägga platta nummer 3 så att dess vänstra kant kommer i linje med tyngdpunkten hos platta ett och två tillsammans. På grund av symmetri ligger denna tyngdpunkt i mitten av figuren och alltså på avståndet $1/4$ från platta tvås vänsterkant. Vi får alltså följande figur med tre plattor.

Tyngdpunkten för plattorna 1 och 2 tillsammans och tyngdpunkten för plat-



ta tre är utritade. För att hitta tyngdpunkten för de tre plattorna tillsammans tittar man i figuren ovan och observerar att den måste ligga mellan den vänstra och högra pilen. Mer exakt, den vänstra pilen representerar dubbelt så stor kraft som den högra och därför ligger tyngdpunkten dubbelt så nära den vänstra pilen som den högra. Tänker man lite inser man kanske att detta blir $1/3 \cdot 1/2 = 1/6$ från den vänstra kanten på den tredje plattan. Vid denna punkt placerar vi nu platta fyra.



Efter ett liknande argument inser man att nästa platta skall placeras $1/2 \cdot 1/4$ från kanten på plattan ovan. Följande platta skall placeras på avståndet $1/2 \cdot 1/5$ från kanten på plattan ovan och så vidare.

Räknar vi hur långt åt sidan vi når blir det

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \ldots$$

eller, om vi bryter ut $1/2$,

$$\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots).$$

Frågan om hur långt åt sidan vi kan stapla kan nu översättas till matematik och blir då frågan om vad som händer med

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots$$

när vi lägger till fler och fler termer. Varje term motsvarar ju precis en ny optimalt placerad platta. Tar vi med 6 termer blir summan till exempel 2.45. Tar vi med 100 termer får vi ungefär 5.2, och tar vi tusen får vi cirka 7.5.

Med våra plattor, som är ca 20 cm långa, betyder det att vi kan komma $1/2 \cdot 0.2 \cdot 7.5$, dvs ungefär 0.75 meter i sidled med tusen plattor (om vi staplar optimalt).

Frågan är nu om det finns någon gräns för hur långt man kan komma? Med matematiska metoder och med hjälp av till exempel integraler kan man visa att summan ovan kan bli hur stor som helt om vi bara tar med tillräckligt många termer. På matematikspråk säger vi att summan *divergerar*.

I sanningens namn bör vi dock påpeka att det blir svårt att i praktiken bygga så värst långt åt sidan. Serien ovan växer väldigt sakta när vi tar med fler och fler termer. Faktum är att om vi tar 1 miljard termer blir summa fortfarande bara ungefär 21 vilket motsvarar 2.1 meter. Tar vi 10^{100} termer blir summan cirka 230 vilket skulle motsvara 23 meter, men så långt kommer vi aldrig i praktiken eftersom 10^{100} är ett så stort tal att det inte tros finnas så många atomer i hela universum (än mindre så många plattor).

I våra egna huvuden kan vi ju dock hantera betydligt större tal än så och vi vet nu att vi i tanken kan bygga en stapel som når precis hur långt i sidled som helst.

2 Om konsten att vinna betingat godis i spel

Problemställning:

Vi har 3 skåp, varav ett gömmer en chokladbit. En besökare får välja ett av skåpen. “Programledaren” (dvs du) öppnar ett tomt skåp, som besökaren inte valt (detta kommer alltid vara möjligt då det finns två tomma skåp). Besökaren erbjuds byta skåp.

Frågeställning:
Vilken strategi är att föredra? Är det bättre att byta skåp, att stanna kvar vid sitt första val eller spelar det ingen roll vad besökaren väljer?

Förklaring:
I. Om vi bestämmer oss för strategin att alltid byta skåp, är sannolikheten för vinst lika med sannolikheten att välja ett tomt skåp vid vårt första val. Sannolikheten att välja ett tomt skåp i första valet är 2/3.

II. För alla 3 dörrar har vi 3 möjligheter/utfall.

	dörr 1	dörr 2	dörr 3
fall 1	C	T	T
fall 2	T	C	T
fall 3	T	T	C

där C betecknar skåp med chokladbit och T betecknar skåp som är tomt

Antag att besökaren väljer dörr 1. Om vi befinner oss i fall 1 öppnas antingen dörr 2 eller dörr 3 (i bilden ovan dörr 2). Om vi befinner oss i fall 2 öppnas dörr 3 och fall 3 så öppnas dörr 2.
Sannolikheten för vinst om vi behåller vårt första val (dörr 1) är 1/3 (ett gynnsamt fall dividerat med 3 möjliga) och sannolikheten för vinst om vi byter är 2/3 (två gynnsamma fall dividerat med 3 möjliga).

III. Antag att vi har 100 skåp (i stället för 3), varav ett innehåller en chokladbit. Efter det att besökaren valt öppnas 98 tomma skåp besökaren inte valt. Sannolikheten att vi valde fel dörr i början är ju 99/100.

För den som fortfarande inte tror oss kan vi hänvisa till internet-adressen;
http://www.amstat.org/publications/jse/v6n3/applets/LetsMakeaDeal.html

3 Den snåle grosshandlarens våg

Det var en gång en grosshandlare som var så snål att han knappt ville slita sin balansvåg. Han hittade på alla möjliga ursäkter till sina kunder för att slippa väga det han sålde. Han såg emellertid alltid noga med att han fick tillräckligt betalt för sina varor.

Nu hade han precis varit vid godisfabriken i staden och inhandlat 27 stycken godispåsar som han tänkte sälja vidare. Precis när han lämnade fabriken gick han förbi dörren till kontoret på godisfabriken och råkade då höra hur verkmästaren berättade för direktören att det under dagen tyvärr skett ett misstag. En av deras anställda hade lagt för mycket godis i en påse.

Vår käre grosshandlare hamnade nu i ett dilemma. Han var ju tvungen att ta reda på om han fått med sig den extra fyllda påsen. Men det innebar ju att han måste slita på sin fina balansvåg.

Hur skall han bära sig åt för att behöva använda balansvågen så få gånger som möjligt? Här i vårt spel så representeras godispåsarna av legobitar. Det man kanske inte tänker på på en gång är att vågen har tre lägen, inte bara tyngst till vänster och tyngst till höger utan också jämvikt. Det kan man använda för att dela upp legobitarna i tre högar med nio i varje. Behåll en hög och jämför de andra två högarnas vikter på vågen. Med en vägning kan man alltså avgöra vilken av dessa högar som innehåller den dopade legobiten.

Den utvalda högen med 9 legobiter delar man i sin tur upp i tre höga om tre. Som tidigare kan man avgöra med en vägning vilken av dessa tre högar som innehåller den dopade biten. Nu tar man och väger två av dessa återstående tre bitarna och behåller en kvar på bordet. Denna sista vägning hjälper oss avgöra vilken av dessa tre som är den dopade biten. **Vi behövde alltså 3 vägningar för att hitta den tunga bland 27 bitar.**

Man kan börja och fundera på hur det blir för 26, och för 28 legobitar? Om vi antar att vi har 26 bitar. Då gör vi tre högar, två högar med 9 bitar i och en hög med 8 bitar i. Väg de två 9-högarna mot varandra. Då kan man se om någon av dem är innehåller den dopade biten. I så fall kan man fortsätta som vid andra vägningen ovan.

Om de väger lika finns den dopade bland de 8 på bordet. I så fall delar vi en dessa åtta i tre höger med 3 plus 3 plus 2 element, o s v.

Nu börjar vi ana hur det fungerar. I följande tabell skriver vi ner hur många vägningar vi minst behöver för ett visst antal bitar.

Antal bitar	Antal vägningar
1	0
2–3	1
4–9	2
10–27	3
⋮	⋮

Den som tänker efter lite nu kan inse att på 4 vägningar kan jag klara en mängd som går att dela upp i tre högar om maximalt 27 bitar, d v s vi klarar 3*27=81 bitar på 4 vägningar. Nu börjar vi verkligen fatta hur det fungerar. Med 5 vägningar bör man klara 3*81=243 bitar. Om man nu observerar att $27 = 3^3, 81 = 3^4$ och $243 = 3^5$, skulle man nu rent av vilja påstå att med k vägningar klarar vi ända upp till 3^k bitar. **Grosshandlaren bör alltså välja att köpa ett antal som är av typen 3^k för att lyckas hitta den tunga påsen bland så många påsar som möjligt med så få vägningar som möjligt.**

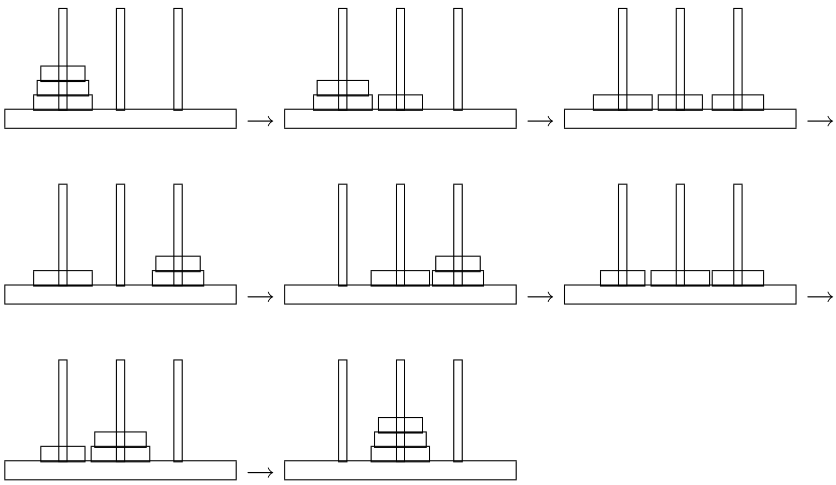
Efter att ha funderat ut detta tyckte grosshandlaren att han hade väldigt bra läge om samma situation skulle uppkomma igen. Men när han kom till fabriken andra dagen fick han höra att åter igen hade en påse hade blivit felaktigt fylld, men idag visste ingen om det var för mycket eller för lite i påsen. Grosshandlaren tänkte att om han lyckades få med denna påse i sitt inköp kunde han gå med vinst om den var för tung, och om den var för lätt kunde han reklamera den. Efter allt problemlösande de sista dagarna var nu grosshandlaren hjärna upptrimmad och han kom fram till att han kunde hitta den felaktigt fyllda påsen bland 12 påsar med bara tre vägningar

Hur gör han?

4 Tornen i Hanoi

Denna lek har börjar med att du har tre pinnar, fixerade i en bottenplatta. På en av pinnarna, vi kallar den pinne 1, sitter ett antal plattor. Plattorna blir mindre och mindre ju högre upp de ligger. Vårt problem består i att flytta alla plattor till en annan pinne. Detta vore enkelt om det inte var för att vi skulle uppfylla vissa regler. Vi får endast flytta en platta åt gången och vi får aldrig lägga en större platta ovanpå en mindre.

Börjar vi med tre plattor är det lätt att se att att vi kan lösa problemet.



Om vi försöker med fyra plattor blir det lite svårare, men det visar sig att även detta problem går att lösa. Faktum är att det faktiskt går att lösa problemet med hur många plattor som helst.

Detta kan man bevisa med något som kallas matematisk induktion. För detta problem skulle man kunna resonera på följande sätt.

Vi vill visa att vi kan lösa problemet med N antal plattor, där N står för något positivt heltal. Vi vet ju att vi klarar att lösa problemet med en platta. Låt oss nu låtsas att vi kan lösa problemet med $N-1$ plattor. Vi känner alltså till en metod för att flytta $N-1$ plattor från en pinne till en annan. Om vi nu vill flytta N plattor kan vi göra så här:

1. Flytta alla plattor utom den understa från pinne 1 till pinne två. Vi har kommit överens om att vi vet hur detta kan göra och behöver därför inte redovisa varje steg.

2. Flytta den största plattan till pinne tre.

3. Flytta de $N-1$ mindre plattorna från pinne två till pinne tre.

Om man tror på det som kallas matematisk induktion (och det gör man om man är matematiker) har vi nu bevisat att det går att lösa problemet för vilket antal (N) plattor som helst. Är detta rimligt? Ja, vi vet ju hur vi flyttat en platta. Med $N = 2$ säger vår metod ovan hur vi flyttar två plattor. Tar vi nu $N = 3$ får vi en metod för att flytta tre plattor och så vidare. Det är inte svårt att tro på att det fungerar för vilket antal som helst.

Nu när vi vet att problemet går att lösa kan vi fråga oss hur många "drag" vi minst måste göra för att flytta N stycken plattor. Om vi låter detta antal betecknas med $P(N)$ kan man, genom att titta på punkterna 1-3 ovan, se att vi måste ha

$$P(N) = P(N-1) + 1 + P(N-1) = 2P(N-1) + 1.$$

Detta är ett exempel på något som kallas en rekurrensekvation. Det finns flera sätt lösa sådana, med det som är lättast (iallafall lättast att förklara) är metoden "gissa och bevisa med induktion". Man kan ganska enkelt, genom att börja med en platta och sedan räkna vidare, se att $P(1) = 1$, $P(2) = 3$, $P(3) = 7$, $P(4) = 15$,$P(5) = 31$ och så vidare. Om man är lite klurig kan man gissa att antalet flyttningar skulle kunna ges av formeln

$$P(N) = 2^N - 1.$$

För att bevisa detta använder vi återigen induktion. Vi behöver alltså visa att vår formel stämmer för $N = 1$ och att om vi antar att den stämmer för $N-1$ stämmer den också för N.

Att $2^1 - 1 = 1$ är ju inte så svårt att se, så fallet $N = 1$ är enkelt. Antag nu att vi vet att $P(N-1) = 2^{N-1} - 1$. Vi vill visa att detta innebär att $P(N) = 2^N - 1$. Vi börjar med vår rekurrensekvation och använder vårt antagande ovan. Då får vi

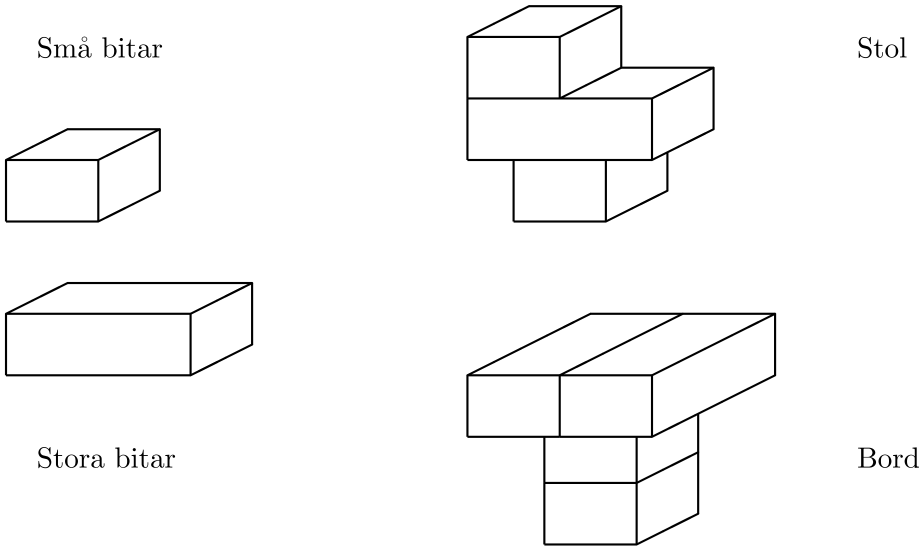
$$P(N) = 2P(N-1) + 1 = 2(2^{N-1} - 1) + 1 = 22^{N-1} - 2 + 1 = 2^N - 1$$

vilket var precis vad vi behövde.

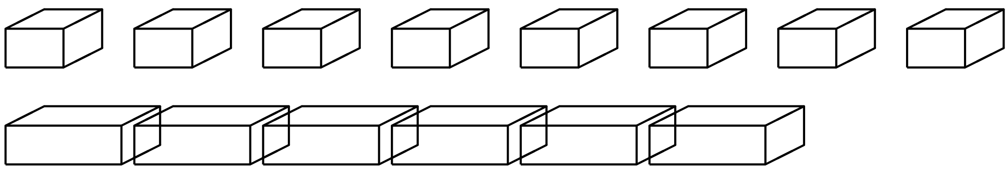
Man kan observera att antalet flyttningar växer ganska fort med antalet plattor. Till exempel går det åt drygt en miljard flyttningar för att flytta 30 plattor. Lyckas man flytta en platta i sekunder och jobbar utan paus tar en sådan övning drygt 32 år. Lycka till.

5 Bygg möbler och utnyttja resurser på bästa sätt

- *Ett snickeri tillverkar bord och stolar. Man bygger dem av stora och små legobitar. Ett bord består av två bitar av vardera sorten, medan en stol består av en stor och två små bitar. I lagret finns 6 stora och 8 små bitar. Varje bord kan säljas för 150:– och varje stol för 100:–. Bitarna kan inte säljas som de är. Hur många bord och hur många stolar ska vi bygga för att få så stora intäkter som möjligt?*



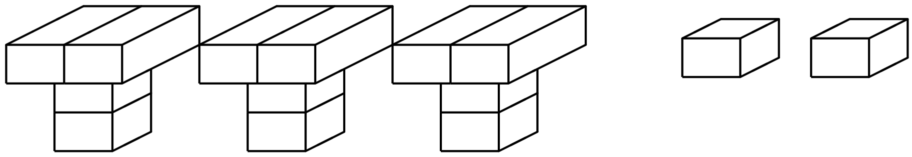
Eftersom vi tjänar mera på att sälja ett bord än att sälja en stol börjar vi med att bygga så många bord som möjligt.



När vi har byggt tre bord finns inga stora bitar kvar, men vi har två små bitar över. De tre borden kan säljas för totalt 450:–.

Eftersom vi har resurser (små bitar) kvar finns det en möjlighet att tjäna mer pengar genom att utnyttja dessa. Men om vi skall använda de två “överblivna” små bitarna kan vi inte bygga så många bord som

150:– + 150:– + 150:– 450:–



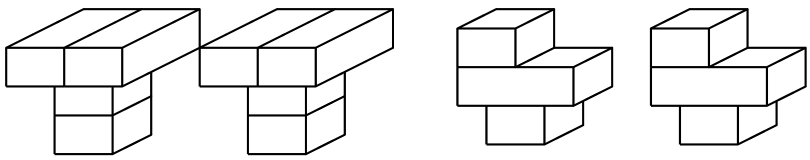
vi tänkt från början utan måste bygga stolar också, trots att dessa inte ger lika stora intäkter per styck.

Om vi tar isär ett av de tre borden "förlorar" vi 150:– av med de 450:– som vi får om vi bygger tre bord.

Om vi lyckas bygga stolar kommer vi att tjäna 100:– per stol. För att tjäna på att bygga stolar i stället för det isärtagna bordet räcker det inte med att bygga en stol; vi måste bygga minst två stycken stolar (2 $\times$ 100:– 200:–) för att tjäna på att ta isär ett bord.

Alltså: pröva med att ta isär ett bord och bygg så många stolar som möjligt:

150:– + 150:– + 100:– + 100:– 500:–



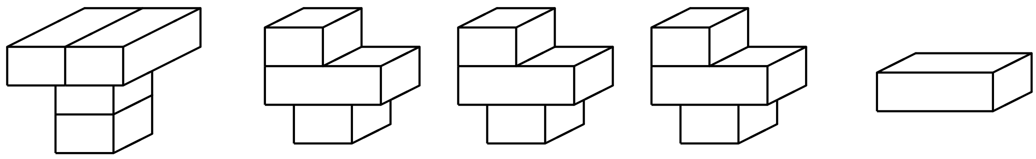
Kan det finnas något sätt att tjäna ännu mer pengar med hjälp av åtta små och sex stora bitar? Pröva med att ta isär ett bord till och bygg stolar av bitarna.

Om vi bygger fler stolar "tjänar" vi 100:– per stol, men då måste vi ta isär ett bord, så att vi "förlorar" 150:–. Totalt förlorar vi 50:– per stol som vi bygger (utöver de två som vi redan har.

Alltså finns inget sätt att tjäna mer pengar med hjälp av åtta små och sex stora bitar än att bygga två stolar och två bord.

- *Antag att vi kan "köpa" en stor bit till. Hur mycket pengar kan vi tänka oss att betala för den och hur många stora bitar är värda detta*

150:– + 100:– + 100:– + 100:– 450:–



pris?

Med hjälp av en stor bit till kan vi ta isär en stol och istället bygga ett bord. På detta tjänar vi 150:– minus 100:–. Alltså kan vi tänka oss att betala högst 50:– per stor bit (betalar vi mindre än 50:– gör vi en förtjänst). Men eftersom vi bara har två stolar att ta isär är vi bara intresserade av att köpa två stora bitar. En tredje stor bit är inte värd någonting för oss eftersom vi inte kan utnyttja den i möbelsnickeriet.

- *Antag istället att vi kan "köpa" fler små bitar. Hur mycket pengar kan vi tänka oss att betala för dessa och hur många små bitar är värda detta pris?*

  Med hjälp av *två* små bitar kan vi ta isär ett bord och istället bygga två stolar bord. På detta tjänar vi 2 × 100:– minus 150:–. Alltså kan vi tänka oss att betala högst 25:– per liten bit, men endast om vi kan köpa två åt gången.

  Eftersom vi bara har två bord att ta isär är vi intresserade av att köpa högst fyra små bitar. Ytterligare små bitar är inte värda någonting för oss eftersom vi inte kan utnyttja den till möbelsnickeriet, om vi inte kan köpa *både* små och stora bitar, förstås.

- *Antag att priset för bord sjunker till 90:–. Hur skall vi bygga för att tjäna så mycket som möjligt?*

  Utgå från den "optimala" lösningen, dvs. två bord och två stolar. Den ger nu endast 380:– i intäkter. Eftersom borden nu ger sämre intäkter än stolar men kräver fler bitar för att bygga så tar vi isär borden och bygger stolar av bitarna istället. Vi får totalt fyra stolar samt två stora bitar över. Detta ger en total intäkt på 400:–, vilket är det bästa vi kan få ut när priset på bord är så lågt.

6 Först till 20

Detta är en gammal matematiklek för två personer. Den som börjar säger antingen talet 1 eller 2. Sedan turas man om att säga nästa tal genom att, till det senast sagda talet, addera antingen 1 eller 2. Den som säger 20 vinner.

Spelet blir lite roligare om man inför en spelplan i stil med följande figur

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

där man flyttar fram någon typ av spelpjäs allt eftersom man adderar tal.

Alternativt kan man skriva upp siffrorna 1 till 20 på ett papper och på något sätt markera de tal man hamnar på i varje steg. Antag t.ex. att de två spelarna markerar sina tal med kryss respektive ringar. Då skulle en spelomgång kunna se ut på följande sätt.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	6	7	~~8~~	9	~~10~~	11	12	~~13~~	14	15	16	~~17~~	18	19	~~20~~

I detta fall vann den spelare som började (och som markerat sina tal med kryss) men man kan fråga sig om motspelaren (med ringar) i något skede kunde gjort annorlunda och förhindrat förlust. Mer specifikt kan man fråga sig om det finns någon strategi för att vinna i detta spel.

Efter att kanske ha spelat några gånger så inser man snart att den som säger 17 kommer att vinna. Oavsett om motspelaren sedan adderar 1 (till talet 18) eller 2 (till talet 19) så kan man ju därefter alltid se till att hamna på 20. Det är då naturligt att gå vidare och fundera över hur man hamnar på 17. För att lyckas med det så inser man (med liknande tankegångar som i resonemanget med 17) att man bör hamna på 14, ty oavsett om motspelaren adderar 1 (till talet 15) eller 2 (till talet 16) så kan man ju därefter alltid se till att hamna på 17. Man kan sedan successivt med ett liknande resonemang komma fram till att de andra nyckeltalen, på vilket man bör hamna för att vinna, är 11, 8, 5 och 2. Slutsatsen är således att för att vara säker på att vinna så bör man vara den som börjar spelet och då välja talet 2. Därefter skall man hela tiden se till att hamna på ovan nämnda nyckeltal.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Antag nu att vi ändrar lite på spelreglerna och istället tävlar om att komma först till 21 (eller något annat godtyckligt positivt heltal). Vilken stragtegi skall man då ha? Eller antag att man tillåts att addera inte bara 1 och 2 utan även 3 i varje steg. Hur skall man då göra? Man kan också fråga sig huruvida det i dessa fall är bäst att börja eller inte?

För att svara på dessa frågor så kan det vara på sin plats att först försöka förstå vad som ligger bakom den vinnande strategin i spelet *Först till 20* ovan. Vi behöver förstå vad nyckeltalen 20, 17, 14, 11, 8, 5, 2 har gemensamt. En viktig observation i vinnarstrategin ovan var det faktum att man alltid kan se till att summan av två efterföljande additioner/förflyttningar alltid blir 3 (ty om motståndaren adderar 1 så adderar du 2 och vise versa). Så om man bara hamnar på det första nyckeltalet (i detta fallet 2) så kan man sedan hela tiden se till att hamna 3 steg längre fram nästa gång, och till slut hamna på 20. Alla nyckeltalen har därför formen $2 + 3n$, för något heltal n, dvs de är 2 + ett tal i treans multiplikationstabell. Andra sätt att uttrycka detta är att säga de har *resten 2 vid division med 3* eller att de är *kongruenta med 2 modulo 3* (vilket skrives $\equiv 2 \pmod 3$ med matematiskt formspråk).

Om vi nu istället tävlar om att komma först till n, där n är ett godtyckligt positivt heltal, så bör vi alltså lista ut vilket det första nyckeltalet är och därefter följa samma strategi som ovan genom att addera så att summan av två efterföljande drag hela tiden blir 3. Det första nyckeltalet (liksom de övriga) skall ha samma rest som n vid division med 3. Om t.ex $n = 37$ så är resten 1 ty $37 = 1 + 3 * 12$ så man skall alltså vara den som börjar och då välja talet 1. Om t.ex. $n = 21$ så är resten 0 (ty 21 är jämnt delbart med 3) vilket innebär att det minsta positiva nyckeltalet är 3 och för att hamna där så måste motståndaren börja. Att det är just treans tabell som har betydelse ovan beror på att man bara får addera 1 eller 2 i varje steg.

Säg nu att det, utöver talen 1 och 2, även är tillåtet att addera någon av talen $3, 4, 5, ..., m$, för något heltal m, i varje steg. Oavsett vilken av dessa tal som motståndaren väljer att addera så kan vi i efterföljande steg också addera ett tillåtet tal så att det tillsammans blir $m + 1$. Så från varje givet nummer kan man, efter det att motståndaren gjort sitt drag, alltid hamna $m + 1$ steg längre fram nästa gång man står på tur att flytta/addera. Om man tävlar om att komma först till något heltal n så är det bara att, med utgångspunkt från n, stega sig tillbaka med $m + 1$ steg i taget för att se vilka nyckeltal man bör hamna på. Eftersom nyckeltalen skiljer sig åt med en multipel av $m + 1$ så kommer de alla att ha samma rest vid division med $m + 1$. Antag t.ex. att vi spelar först till 10000 och får addera $1, 2, 3, 4, 5$ eller 6 i varje steg (med ovanstående beteckningar är $n = 10000$ och $m = 6$). Eftersom 10000 har resten 4 vid division med 7 (ty $10000 = 4 + 7 * 1428$) så bör man alltså se till att börja spela och då välja 4 och därefter se till att hamna på $11, 18, 25, 32..., 9996, 10000$.

Ett annat klassiskt spel som påminner lite om *Först till 20* är spelet Nim. Nim spelas av två spelare. Man har ett antal högar med ett antal stickor i varje hög (i det klassiska Nim hade man 3 högar med 3, 5 respektive 7 stickor i varje hög). Spelarna turas om att välja en hög och antalet stickor hon/han vill ta från högen (minst 1 och som mest hela högen). Den spelare som tar den sista stickan vinner. Det finns ett otal hemsidor på internet där man kan spela olika typer av Nim-varianter interaktivt. Välj t.ex. att titta under Nim Games i raden av interaktiva applikationer på sidan

http://illuminations.nctm.org/Activities.aspx?grade=all