Matematik för lärare 3a (LMA310), Analys forts. 080116

Skrivtid: 8.30-13.30 Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa. Formelsamling på baksidan.
Telefon: Martin Berglund, 0762-721861
Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.

---

1 Beräkna

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x-3)}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$

(3p)

2 Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y' + xy = x, \qquad y(0) = 7$$

(3p)

3 Bestäm volymen V av den kropp som bildas då det ändliga område som begränsas av x-axeln och grafen till funktionen $y = x(2-x)$ roterar

a) runt x-axeln, b) runt y-axeln

(3p)

4 Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(x^2-1)}\,dx$$

(kan du bara visa att den är konvergent så ger det delpoäng). (3p)

5 Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x}-1)\ln(1+x^3)}{(1-\cos(3x))^2}$$

(3p)

6 Lös differentialekvationen

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$$

(3p)

7 a) Definiera vad som menas med en konvergent serie och en series summa.

b) Finn summan av de konvergenta av serierna $i)$ $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{4n+1}$, $ii)$ $\sum_{n=1}^{\infty} 1/3^{4n+1}$ och $iii)$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

(3p)

8 a) Bevisa Maclaurinutvecklingen

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

i specialfallet $f(x) = \cos x$ och $n = 2$, dvs bevisa $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4)$.

b) Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\,dt$.

(3p)

OBS: formelsamling, vgv

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + \binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$