

Algebra och talteori

MMGL31

Föreläsning 7
VT 2010

Samuel Bengmark

Repetition

- Primtal/Irreducibla tal i $\mathbb{Z}$
- Antalet primtal $\equiv_4 3$
- Några kända förmodanden
 - Goldbachs förmodan
 - Primtalstvillingar
- Primtal på formen $a^n - 1$
- Mersenneprimtal

Idag

- Perfekta tal
- Samband mellan Mersenneprimtal och jämna perfekta tal.

Perfekta tal

Definition

En delare till ett tal kallas äkta delare om det inte är lika med talet själv.

Exempel

- 2 är delare till 6, och även en äkta delare
- 6 är en delare till 6 men ej en äkta delare till 6.

Definition

Ett tal som är summan av sina äkta delare kallas perfekt.

Exempel

$6 = 1 + 2 + 3$, $496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$, men
 $10 \neq 1 + 2 + 5 = 8$ och $12 \neq 1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$

Mersenneprimtal och perfekta tal

Vi skall nu se att det finns ett 1-1 samband mellan Mersenneprimtal och jämna perfekta tal.

Först det lättaste hållet bevisat för 2000 år sedan av Euklides: Mersenneprimtal $\rightarrow$ perfekt tal.

Sats

Om $2^p - 1$ är ett primtal så är $2^{p-1}(2^p - 1)$ ett perfekt tal.

Euklides bevis

- Talet $T = 2^{p-1}(2^p - 1)$ faktoriseras som ett antal 2:or samt ett primtal $(2^p - 1)$.
- De äkta delarna är därmed $1, 2, \dots, 2^{p-1}$ samt $1 \cdot (2^p - 1), 2 \cdot (2^p - 1), \dots, 2^{p-2} \cdot (2^p - 1)$, ~~$2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$~~ .
- Summan av de första faktorerna blir $1 + 2 + \dots + 2^{p-1} = (2^p - 1)/(2 - 1) = 2^p - 1$.
- Summan av de andra faktorerna blir $1 \cdot (2^p - 1) + 2 \cdot (2^p - 1) + \dots + 2^{p-2} \cdot (2^p - 1) = (2^p - 1)(1 + 2 + \dots + 2^{p-2}) = (2^p - 1)(2^{p-1} - 1)$.
- Totalt summeras de äkta delarna till $2^{p-1} + (2^p - 1)(2^{p-1} - 1) = (1 + 2^{p-1} - 1)(2^p - 1) = 2^{p-1}(2^p - 1)$ dvs lika med talet T !

$\sigma(n)$, definition

För att bevisa den omvända riktningen behöver vi hjälp av följande funktion.

Definition

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d,$$

dvs $\sigma(n)$ är summan av alla delare till n (inte bara äkta).

Exempel

$$\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$$

$$\sigma(8) = 1 + 2 + 4 + 8$$

$$\sigma(p) = 1 + p \text{ om } p \text{ är irreducibelt/primtal.}$$

$$\text{OBS! } \sigma(a) = 2a \text{ om } a \text{ perfekt tal}$$

$\sigma(n)$, beräkning

Sats

1. $\sigma(p^k) = (p^{k+1} - 1)/(p - 1)$
2. $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$ om $\text{SGD}(m, n) = 1$

Exempel

$$\sigma(6) = \sigma(2)\sigma(3) = (2^2 - 1)/(2 - 1) \cdot (3^2 - 1)/(3 - 1) = 3 \cdot 4 = 12$$

Bevis lämnas som egen uppgift.

Eulers riktning

- Antag att n är ett jämnt perfekt tal. Låt $n = 2^k m$ där m udda.
- Får att $\sigma(n) = \sigma(2^k m) = \sigma(2^k)\sigma(m) = (2^{k+1} - 1)\sigma(m)$
- Eftersom n perfekt tal ger detta $(2^{k+1} - 1)\sigma(m) = 2n = 2 \cdot 2^k m = 2^{k+1} m$
- Ger att $2^{k+1} | \sigma(m)$, dvs $\sigma(m) = 2^{k+1} c$.
- Sätter in och får $(2^{k+1} - 1)2^{k+1} c = 2^{k+1} m$, dvs $m = (2^{k+1} - 1)c$.
- Om $c > 1$ skulle då $\sigma(m) > 1 + c + m = 1 + c + (2^{k+1} - 1)c = 1 + 2^{k+1} c = 1 + \sigma(m)$ enligt ovan.
- Slutsats $c = 1$ och $n = 2^k m = 2^k (2^{k+1} - 1)c = 2^k (2^{k+1} - 1)$

Mersenneprimtal och perfekta tal

- Har ni visat att det finns ett 1-1 samband mellan Mersenneprimtal och jämna perfekta tal.
- Finns det udda perfekta tal? Man vet ej. Spana in <http://www.oddperfect.org>

Hittas stora primtal

- <http://www.mersenne.org/prime.htm>

Mitt i kursen-utvärdering

- Målet och relevansen
- Föreläsningar
 - repetition
 - tempo
 - ppt Vs tavla
- Övningar
 - uppgifterna
 - samarbetet
- Redovisningsuppgifterna
- Information

Kursmålen

Redogöra för och göra beräkningar Utforskande lärare

- primtal och irreducibla tal
- unik faktorisering
- grupp, ring, kropp
- kongruensräkning,
- Fermats lilla sats,
- Eulers phi-funktion och
- kvadratisk reciprositet
- metoder för ekvationslösning
- primtalstestning,
- RSA-kryptering
- perfekta tal
- summor av två kvadrater,
- Gaussiska heltal,
- algebraiska heltal.

Redogöra lättfattligt

Mitt i kursen-utvärdering

- Målet och relevansen
- Redovisningsuppgifterna
- Föreläsningar
 - repetition
 - tempo
 - ppt Vs tavla
- Information
- Övningar
 - uppgifterna
 - samarbetet

Info

Be släkt och vänner att boka in presentationen!