# Matematik för naturvetare

Jan Alve Svensson

17 augusti 2009

## Innehåll

# 1 Aritmetik och algebra

## 1.1 Olika tal

De *naturliga talen* är

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots.$$

De är oändligt många och det går därför inte att skriva upp en fullständig förteckning av dem. Här är det löst genom att man skriver upp sex av dem och sedan skriver ... i hop om att läsaren själv förstår vad som följer. När man tänker på alla naturliga tal tillsammans talar man om *mängden* av naturliga tal. T ex är 435 med i mängden av naturliga tal, men inte $-4$.

De naturliga talen används för att ange *antal* av något, men också för att ange *ordning*, t ex fjärde våningen. De används också för att ge namn åt saker, t ex 6:ans spårvagn eller buss 58. Det har förstås inte så mycket med matematik att göra.

Två naturliga tal kan adderas och multipliceras utan problem: $3+15=18$, $17\cdot 12=204$. Vi har det som kallas två stycken (två-ställiga) operationer på mängden av naturliga tal; addition (betecknad med $+$) och multiplikation (betecknad med $\cdot$).

Eftersom vi har två operationer kan dessa mixas på olika sätt, t ex $3+45+67$, $3\cdot 45+67$, $3+45\cdot 67$, $3\cdot 45\cdot 67$.

För att garantera att alla uppfattar dessa uttryck på samma sätt måste man ha vissa konventioner om *prioritet*. Regeln är att

- multiplikation ska göras för addition
- samma operationer ska genomföras från vänster till höger (läsriktning).

För att vara tydlig, men också för att kringgå läsriktningen kan använder man parenteser, och lägger till konventionen att

- uttryck inom parenteser utförs först (med start i den innersta om det finns flera).

Det betyder att

$$\begin{array}{rlll}
3+45+67 & \text{står för} & (3+45)+67 & \\
3\cdot 45+67 & \text{står för} & (3\cdot 45)+67 & \text{och inte} \quad 3\cdot(45+67) \\
3+45\cdot 67 & \text{står för} & 3+(45\cdot 67) & \text{och inte} \quad (3+45)\cdot 67 \\
3\cdot 45\cdot 67 & \text{står för} & 3\cdot(45\cdot 67). &
\end{array}$$

**Exempel.** Beräkna $4+2\cdot 7+5\cdot 4\cdot(3+2\cdot(4+5))$ □

*Lösning.* Konventionerna ger

$$\begin{aligned}
4+2\cdot 7+5\cdot 4\cdot(3+2\cdot(4+5)) &= 4+2\cdot 7+5\cdot 4\cdot(3+2\cdot 9) = \\
&= 4+2\cdot 7+5\cdot 4\cdot(3+18) = 4+2\cdot 7+5\cdot 4\cdot 21 = \\
&= 4+14+20\cdot 21 = 4+14+420 = 18+420 = 438.
\end{aligned}$$

Vill vi skriva upp allmänna egenskaper för dessa operationer blir det bäst att inte använda några särskilda naturliga tal. För att lösa det brukar man använda bokstäver som står för vilkasomhelst av talen. Om man säger "låt $a$ vara ett naturligt tal" betyder det att $a$ kan vara vilketsomhelst av talen i mängden av naturliga tal. Om $a$ och $b$ är naturliga tal har vi alltså också att $a+b$ och $a\cdot b$ är naturliga tal. Det är vanligt att man utelämnat tecknet för multiplikation när man använder bokstäver så att $a\cdot b$ skrivs $ab$. Detta gäller också vid multiplikation mellan ett specifikt tal och en parentes, så att t ex $5\cdot(3+4)$ skrivs $5(3+4)$.

Följande gäller:

$$\boxed{\begin{array}{rclrcll}
a+b &=& b+a & ab &=& ba & \textit{kommutativitet} \\
a+(b+c) &=& (a+b)+c & a(bc) &=& (ab)c & \textit{associativitet} \\
a+0 &=& a & a\cdot 1 &=& a & \textit{identitet} \\
\multicolumn{6}{c}{a(b+c) = ab+ac} & \textit{distributivitet}
\end{array}}$$

Utöver addition och multiplikation finns operationerna *subtraktion* (betecknad $-$) och *division* (betecknad $\div$ eller $/$). Karakteristiskt för de naturliga talen är att dessa operationer inte alltid är möjliga (så länge man ska hålla sig inom dem).

T ex är $45-15=30$ möjligt men inte $15-45$ (för svaret är då $-30$ som inte är ett naturligt tal). Lika så fungerar $35/5=7$ men inte $5/35$.

Observera att subtraktion och division varken är kommutativa eller associativa operationer:

$$\begin{array}{rclcrcl}
15-7 & = & 8 & \text{men} & 7-15 & & \text{är inte möjligt} \\
8/4 & = & 2 & \text{men} & 4/8 & & \text{är inte möjligt} \\
15-(7-4) & = & 15-3=12 & \text{men} & (15-7)-4 & = & 8-4=4 \\
8/(4/2) & = & 8/2=4 & \text{men} & (8/4)/2 & = & 2/2=1.
\end{array}$$

Om inga parenteser finns gäller läsriktningen för subtraktion och division:

$$\begin{array}{rcl}
a-b-c & \text{står för} & (a-b)-c \\
a/b/c & \text{står för} & (a/b)/c
\end{array}$$

Eftersom vi nu har fyra operationer måste konventionerna om prioritet utökas med

- multiplikation och division utförs före addition och subtraktion,
- mellan multiplikation och division gäller läsriktningsprioritet,
- mellan addition och subtraktion gäller läsriktningsprioritet.

**Exempel.** Beräkna $94-3-7\cdot 8/2+8/2\cdot 9$ □

*Lösning.*

$$\begin{aligned}
94-3-7\cdot 8/2+8/2\cdot 9 &= 94-3-56/2+4\cdot 9 = 94-3-28+36 = \\
&= 91-28+36 = 63+36 = 99
\end{aligned}$$

Lägg märke till skillnaden mellan $45-5+4=44$ och $45-(5+4)=36$ samt $45-5-4=36$ och $45-(5-4)=44$.

Eftersom subtraktion och division inte alltid är möjlig om man bara har de naturliga talen till hands, tillfogas nya tal. Vi gör det i två steg: först tar vi hand om subtraktion och sedan division.

De *hela* talen (eller *heltalen*) är $0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\pm 4,\pm 5\ldots$. Till varje *positiv* naturligt tal har fogats en *negativ* motsvarighet. Talet 0 är varken positivt eller negativt.

Addition och multiplikation sker på förväntat sätt: $4+(-5)=-1$, $4\cdot(-5)=-20$, men inte fullt lika uppenbart $(-4)\cdot(-5)=20$. Motiveringen till det sista kan var att om en skuld, bestående av enheter om 5 kronor, minskas med 4 stycken så görs en vinst på 20 kronor. Den matematiska motiveringen är att produkten av två negativa tal måste vara positiv för att de tidigare räknereglerna för addition om multiplikation ska fortsätta att gälla. Av liknande skäl är t ex $-(-5)=5$.

Observera att subtraktion nu blivit ett specialfall av addition: $a-b=a+(-b)$.

För att göra division allmänt möjlig införs de *rationella talen* eller bråktalen. De är alla uttryck av formen (bråk)

$$a/b \quad \text{eller} \quad \frac{a}{b},$$

där $a$ och $b$ är heltal och $b\neq 0$. T ex är $3/4$ och $(-512)/35$ rationella tal. Det är viktigt att man uppfattar dem som just tal och inte som uppgifter som ska beräknas! I talet $a/b$ kallas $a$ *täljaren* och $b$ *nämnaren*. Det rationella talet $a/1$ skrivs förstås $a$, så att alla heltal också är rationella tal.

Två rationella tal $a/b$ och $c/d$ är *lika* (skrivs förstås $a/b=c/d$) om $ad=cb$ (d v s om de blir lika efter multiplikation med produkten av de två nämnarna $b$ och $d$).T ex är $15/20=21/28$, för $15\cdot 28=420=20\cdot 21$. Detta betyder t ex

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c},$$

om $c\neq 0$. Att gå från vänster till höger i denna likehet kallas att *förlänga* med $c$. Att gå från höger till vänster kallas att *förkorta* med $c$.

Förlängning med $-1$ ger att $\dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b}$ som båda brukar skrivas $-\dfrac{a}{b}$.

Eftersom ett givet rationellt tal kan skrivas på (oändligt) många sätt är det bra att kunna skriva dem på *förkortad* form. Om $a = cd$, (där $a$, $c$ och $d$ är heltal) så säger man att $c$ delar $a$, eller att $c$ är en faktor i $a$. T ex är 5 en faktor i 45 men inte i 46. Att bråket $a/b$ är förkortat betyder att det största talet som delar både $a$ och $b$ är 1. T ex är $7/5$ förkortat men inte $28/21$, för här är 7 en faktor i både täljare och nämnare.

Det finns ett bra sätt att hitta den förkortade versionen av ett bråk, som använder nåt som kallas Euklides algoritm. Vi ska inte gå in på det här. Några exempel kan klaras ändå (om man kan multiplikationstabellen).

**Exempel.** Förkorta $5040/40320$. □

*Lösning.*

$$\frac{5040}{40320} = \frac{504\cdot 10}{4032\cdot 10} = \frac{504}{4032} = \frac{8\cdot 63}{8\cdot 504} = \frac{63}{504} = \frac{7\cdot 9}{7\cdot 72} = \frac{9}{72} = \frac{9\cdot 1}{9\cdot 8} = \frac{1}{8}$$

Rationella tal kan adderas och multipliceras (så att de tidigare räknereglerna för operationerna fortsätter att gälla):

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd} \quad \text{(liknämnigt)} \\ \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} &= \frac{ac}{bd} \end{aligned}$$

Man behöver inte slaviskt följa regeln för addition; det viktiga är att de tal som ska adderas har samma nämnare innan additionen görs. Detta kan göras mer eller mindre effektivt och man har ofta användning av att faktorisera nämnarna.

**Exempel.** Beräkna $\frac{2}{63} + \frac{11}{18}$ på förkortad form. □

*Lösning.* Vi *faktoriserar* (skriver som produkter) först nämnarna för att på så sätt hitta en så liten gemensam nämnare som möjligt:

$$\begin{aligned} \frac{2}{63} + \frac{11}{18} &= \frac{2}{7\cdot 9} + \frac{11}{2\cdot 9} = \{\text{förlänger med 2 respektive 7}\} = \frac{2\cdot 2}{2\cdot 7\cdot 9} + \frac{7\cdot 11}{7\cdot 2\cdot 9} = \\ &= \frac{4}{2\cdot 7\cdot 9} + \frac{77}{2\cdot 7\cdot 9} = \frac{81}{2\cdot 7\cdot 9} = \{\text{ förbereder förkortning}\} = \frac{9\cdot 9}{2\cdot 7\cdot 9} = \frac{9}{14} \end{aligned}$$

Man ser här tydligt hur bra det är att kunna faktorisera både för gemensam nämnare och för förkortningen. Om man direkt använder regeln för addition får man

$$\frac{2}{63} + \frac{11}{18} = \frac{2\cdot 18 + 63\cdot 11}{63\cdot 18}$$

och det kan bli en betydligt jobbigare uppgift att hitta den förkortade formen!

Bråk kan också subtraheras och divideras:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} - \frac{c}{d} &= \frac{ad}{bd} - \frac{bc}{bd} = \frac{ad-bc}{bd} \quad \text{(liknämnigt)} \\ \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} &= \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}. \end{aligned}$$

Lägg märke till att division nu blivit ett specialfall av multiplikation! Talet $d/c$ kallas det inverterade värdet till $c/d$. Att dividera med $c/d$ är det samma som att multiplicera med dess inverterade värde.

Division mellan bråktal kan också skrivas som *dubbla bråk* (bråk mellan bråktal):

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc},$$

fast det första skrivsättet har en tendens att bli svårläst; det mittersta bråkstrecket ska vara något längre och stå i jämnhöjd med likhetstecknet.

**Exempel.** Skriv

$$\frac{\frac{1}{7}-\frac{3}{11}}{\frac{2}{63}+\frac{11}{18}}$$

på förkortad form. □

*Lösning.*

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{7}-\frac{3}{11}}{\frac{2}{63}+\frac{11}{18}} &= \left(\frac{1}{7}-\frac{3}{11}\right)\div\left(\frac{2}{63}+\frac{11}{18}\right)\\
&= \left(\frac{1\cdot 11}{7\cdot 11}-\frac{3\cdot 7}{11\cdot 7}\right)\div\left(\frac{2\cdot 2}{7\cdot 9\cdot 2}+\frac{11\cdot 7}{2\cdot 9\cdot 7}\right)\\
&= \left(\frac{11-21}{11\cdot 7}\right)\div\left(\frac{4+77}{2\cdot 9\cdot 7}\right)=-\frac{10\cdot 2\cdot 9\cdot 7}{11\cdot 7\cdot 81}=-\frac{20}{99}
\end{aligned}$$

Nu kan man tycka att talen borde räcka till och att man kan vara nöjd. De rationella talen kan användas för att räkna tillgångar och skulder av delar av antal (t ex kronor).

Tidigt i räknekonstens historia visade det sig emellertid att de inte räcker för att mäta (exakta) avstånd. Om man ritar en rätvinklig triangel med kateter som båda har längd 1 får man en hypotenusa vars längd inte kan mätas med ett rationellt tal (enligt Pythagoras har den längd $l$ som löser $l^2 = 1 + 1^2 = 2$ och inget rationellt tal $a/b$ har egenskapen att $(a/b)^2 = 2$).

De *reella talen* tar sin utgångspunkt i just (längd)*skalan*. Varje rationellt tal är också ett reellt tal eftersom även de kan ange längder av sträckor.

De reella talen är alla tal som kan skrivas som (ändliga eller oändliga decimalutvecklingar):

$$n, a_1a_2a_3a_4a_5\ldots$$

där $n$ är ett heltal och $a_i$ är heltal mellan 0 och 9. Varje reellt tal motsvara ett specifikt ställe (punkt) på den *reella tallinjen*. Det är viktigt att förstå att matematikens tallinje inte är en fysiskt möjlig företeelse. T ex har den ingen tjocklek alls, den har oändlig utsträckning i två riktningar och mellan två punkter, vilka som helst, finns det oändligt många andra och varje avsnitt av den kan halveras (i all evighet).

De reella talen kan användas för att mäta t ex längder, vikter, volymer, hastigheter, men också antal. Det mest anmärkningsvärda med dem är förmodligen deras enorma mångsidighet i praktiska sammanhang.

Om $r$ är det reella talet ovan så är

$$r = n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \frac{a_4}{10000} + \frac{a_5}{100000} + \cdots$$

där additionen (möjligen) fortsätter i all evighet.

T ex är

$$\frac{1}{9} = 0,11111\ldots$$

Att det går att addera/subtrahera och multiplicera/dividera reella tal är kanske nu inte alldeles uppenbart. Addition och subtraktion kan ganska lätt förstås geometriskt genom att sträckor läggs efter varandra. Multiplikation och division kan också beskrivas på liknande sätt, men vi lämnar det därhän och konstaterar kort och gott att de tidigare räknereglerna för operationerna gäller även för reella tal.

Allt detta kan tyckas en smula överdrivet eftersom man i praktiken bara kan räkna med närmevärden till längder, vikter o s v. I matematiken är det emellertid väsentligt att räkna exakt, för annars gäller inte räknereglerna!

Om man t ex får för sig att man konsekvent bara ska räkna med tre decimaler, så gäller faktiskt inte den associativa lagen, för då skulle vi ha:

$$(12\cdot 0,012)\cdot 0,003 = 0,144\cdot 0,003 = 0,004$$

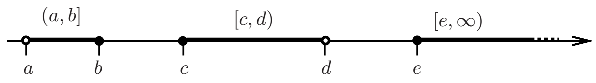
men

$$12 \cdot (0,012 \cdot 0,003) = 12 \cdot 0 = 0.$$

Om räkningarna gäller ton av guld, så är den en skillnad på fyra kilo (en rejäl förmögenhet). Att räkna så bra som möjligt med närmevärden är en konst, som vi inte ska gå in på här.

Det förekommer ofta att man vill ange speciella avsnitt av den reella tallinjen. Det brukar göras med beteckningar för *intervall*. Så låt $a$ och $b$ vara två reella tal, där $a$ är mindre än $b$ ($a$ till vänster om $b$ på tallinjen, $a < b$)

| | |
|---|---|
| $[a,b]$ | betecknar avsnittet som består av alla reella tal mellan $a$ och $b$, inklusive $a$ och $b$ |
| $(a,b)$ | betecknar avsnittet som består av alla reella tal mellan $a$ och $b$, exklusive $a$ och $b$ |
| $(a,b]$ | betecknar avsnittet som består av alla reella tal mellan $a$ och $b$, exklusive $a$ men inklusive $b$ |
| $[a,b)$ | betecknar avsnittet som består av alla reella tal mellan $a$ och $b$, inklusive $a$ men exklusive $b$ |
| $(-\infty,b]$ | betecknar avsnittet som består av alla reella tal till vänster om $b$, inklusive $b$ |
| $[a,\infty)$ | betecknar avsnittet som består av alla reella tal till höger om $a$, inklusive $a$ |




Figur 1: Några intervall på tallinjen.

Symbolen $\infty$ står för "oändligheten" och är inget reellt tal. Observera att '(' respektive ')' betyder att ändpunkten inte är med och att '[' respektive ']' betyder att ändpunkten är med.

### 1.1.1 Övningar

**1.1.1** Beräkna

a) $7-(-2)\cdot(3-9)\cdot((2+(-5)-8)\cdot(-3-(-5))-4)$

b) $(-4-2)\cdot((-6-(-9))-((6-(-7)+3)\cdot(-2-3)+(-1)\cdot(7-(-4))))$

**1.1.2** Skriv utan parenteser och onödiga minustecken

a) $a-(-b)\cdot(a+1)-b\cdot(-a+1)$ b) $((-a)\cdot(-b)+a\cdot(b-2\cdot(-a)))\cdot(-1+b)$

**1.1.3** Skriv följande tal som rationella tal på enklaste form

a) $\dfrac{5040}{40320}$ b) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{5}$ c) $\dfrac{1}{7}\div\dfrac{4}{7}$

d) $\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{3}{20}\div\dfrac{9}{100}\cdot\dfrac{5}{19}$ e) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)\div\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{2}{3}\right)$

**1.1.4** Skriv följande på gemensamt bråkstreck

a) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x-3}$ b) $\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{1}{x}$ c) $\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{1}{x+2}$ d) $\dfrac{3}{1+x}-\dfrac{5}{1-4x}$

## 1.2 Potenser

**Exempel.** En bakteriekoloni växer med 20% (i antal) per timme under konstanta omgivande förhållanden. Hur stor är den procentuell tillväxten under fem timmar? □

*Lösning.* Vi sätter det ursprungliga antalet till $M$ och vet att efter en timme är den $M+0,2M=1,2M$. För varje timme som går blir det nya antalet $1,2$ gånger den tidigare. Efter fem timmar blir antalet

$$(1,2)\cdot(1,2)\cdot(1,2)\cdot(1,2)\cdot(1,2)M$$

Vi ser att vi behöver ett sätt att beteckna den upprepade multiplikationen med 1,2; det vore inte så roligt att skriva upp vad det blir efter ett dygn. Det motiverar följande

Om $a$ är ett tal och $n$ ett naturligt tal så betyder

$$\begin{aligned} a^n &= \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}_{n \text{ gånger}} \text{ om } n \neq 0 \\ a^0 &= 1 \text{ om } a \neq 0 \\ a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \end{aligned}$$

(Uttrycket $0^0$ ges ingen mening alls.)

*Lösning.* [fortsättning] Efter fem timmar är massan $(1,2)^5 M$. Vi har att $(1,2)^2 = 1,44$ så $(1,2)^5 = (1,44)^2 1,2 = 2,0736 \cdot 1,2 = 2,48832 = 1 + 1,48832$. Det betyder att massan på fem timmar ökar med ungefär 149 %.

Uttrycket $a^n$ kallas en (heltals)*potens* av $a$. Talet $a$ kallas för *basen* och kan vara vilket tal som helst. Talet $n$ för *exponenten* och kan vara vilket heltal som helst (fast inte 0 om $a = 0$).

För potenser gäller följande räkneregler för heltalspotenser

**Potenslagar**

För alla tal $a$, $b \neq 0$ gäller det att

- $a^0 = 1$
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.
- $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

För att visa dessa räkneregler (och komma ihåg dem!) gäller det bara att tänka på vad potenserna betyder. T ex

$$(2^3)^4 = (2\cdot 2\cdot 2)^4 = (2\cdot 2\cdot 2)\cdot(2\cdot 2\cdot 2)\cdot(2\cdot 2\cdot 2)\cdot(2\cdot 2\cdot 2) = 2^{3\cdot 4}.$$

**Exempel.** Förenkla $\dfrac{21a^5b^4c^3}{14a^3b^4c^5}$.

*Lösning.* Man har

$$\frac{21a^5b^4c^3}{14a^3b^4c^5} = \frac{7\cdot 3}{2\cdot 7}\cdot a^{5-3}b^{4-4}c^{3-5} = \frac{3}{2}\cdot a^2c^{-2}$$

□

Man kan man se potenser som en ny räkneoperation, så det betyder att man måste ha nån ytterligare konvention kring prioritet.

Om man skriver $2^{3^2}$ så ska det betyda $2^9$ vilket inte är samma som $(2^3)^2$, som är $2^6$. Det betyder att om det står något uttryck i exponenten av en potens ska det räknas ut före potensen. I typsatt matematisk text är detta ganska enkelt att följa men det kan vara värre i viss programvara för beräkningar. Ofta skrivs $2^3$ som 2^3 och $2^{3^2}$ skrivs 2^(3^2) $= 2^9$. Om man skriver 2^3^2 får man (förmodligen) istället (2^3)^2 $= 2^6$. Det betyder att man vid upprepade potenser använder läsriktningsprioritet i programvara, men en annan konvention i typsatt matematisk text!

Tillsammans med de tidigare prioriteringsreglerna har vi alltså att uttryck ska beräknas enligt:

1. Parenteser först (och man startar med de innersta)
2. sedan exponenter

3. därefter potenser
4. sedan multiplikation och division
5. sist addition och subtraktion

Vid lika prioritet gäller läsriktningen (vänster till höger).

## 1.3 Godtyckliga potenser

Du ska försöka bestämma (mantel)arean av en klockgrodas romkorn i ett visst stadium i utvecklingen. Du har inga avancerade apparater till ditt förfogande men kan väga ett enskilt romkorn ganska exakt liksom vikten av hela samlingen av rom. På så sätt vet du hur många romkornen är.

För att mäta volymen av rommen fyller du en spann med vatten och sänker ner rommen. Du mäter hur mycket vatten som rinner ut och får på så sätt rommens volym. Eftersom du vet antalet romkorn vet du nu volymen av ett enskilt korn.

Du utgår från att romkornen är klotrunda. Man vet att om kornet har radie $r$ så ges dess volym $V$ och dess (mantel)area $A$ av formlerna

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} \qquad\qquad A = 4\pi r^2.$$

Du känner till $V$ men vill ha tag i $A$. Det gäller att bli av med $r$. Du ser att både $V^2$ och $A^3$ innehåller faktorn $r^6$, så kvoten mellan dem blir en konstant:

$$\frac{A^3}{V^2} = \frac{4^3\pi^3 3^2}{4^2\pi^2} = 36\pi.$$

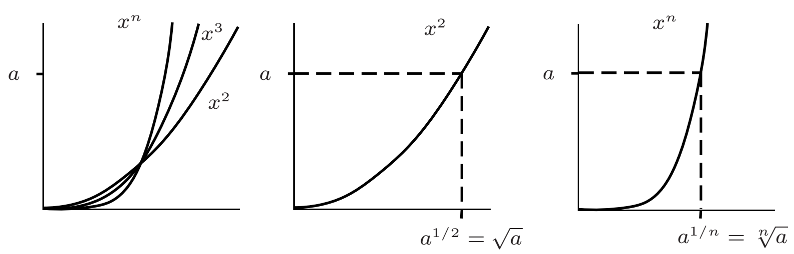
Detta ger nu $A^3 = 36\pi V^2$, där du känner till högerledet men vill bestämma $A$. För att lösa ut $A$ vill du ta båda sidor upphöjt till en tredjedel:

$$A = (A^3)^{1/3} = (36\pi V^2)^{1/3}$$

Man vill alltså kunna räkna med exponenter som är rationella tal (och inte bara heltal som tidigare).

Vi börjar med $a^{1/2}$. Vi ska ha $(a^{1/2})^2 = a$, så $a^{1/2}$ löser ekvationen $x^2 = a$. Om man ritar grafen till $x^2$ ser man att den ekvationen saknar lösningar om $a$ är negativt men har två lösningar om $a$ är positiv. Vi definierar nu, om $a$ är positiv,

**Definition** Om $a$ är ett positivt tal så är $a^{1/2}$ den positiva lösningen till ekvationen $x^2 = a$. Vi sätter också $0^{1/2} = 0$.




Man använder ofta skrivsättet $\sqrt{a}$ i stället för $a^{1/2}$ och kallar det *kvadratroten* ur $a$. Observera att ekvationen $x^2 = a$ (där $a$ är positivt) har två lösningar $\pm\sqrt{a}$.

Det är ett vanligt missförstånd att tro att t ex $\sqrt{9} = \pm 3$ eftersom både 3 och $-3$ har 9 som kvadrat. Men $\sqrt{9}$ är definierat som den (enda!) *positiva* lösningen till $x^2 = 9$, så $\sqrt{9} = 3$.

Grafen till $x^n$, där $n$ är ett positivt heltal har samma principiella uppförande som grafen till $x^2$, för positiva tal, så vi kan också definiera

**Definition** Om $a$ är ett positivt tal så är $a^{1/n}$ den positiva lösningen till ekvationen $x^n = a$. Vi sätter också $0^{1/n} = 0$.

Talet $a^{1/n}$ betecknas i bland $\sqrt[n]{a}$ och kallas *n:te roten* ur $a$ ($\sqrt[3]{a}$ kallar *kubikroten* ur $a$).

Om $m$ och $n$ är heltal och $n$ är positivt så betyder

$$a^{m/n} = (a^m)^{1/n}$$

Det räkneregler som gäller för potenser med heltalsexponent gäller även för potenser med rationell exponent.

Vi har nu talat om vad $a^{\text{rationellt tal}}$ betyder. Med lite mer matematik kan man också definiera vad $a^{\text{reellt tal}}$ betyder, så att räknereglerna för potenser fortsätter att gälla.

**Exempel.**

a) $27^{1/3} = (3^3)^{1/3} = 3^1 = 3.$

b) $(\sqrt{8})^{2/3} = ((2^3)^{1/2})^{2/3} = 2^1 = 2$

c) $\sqrt[3]{81} - \sqrt[6]{9} + \sqrt{12} - \sqrt[6]{27} - \sqrt[3]{3\sqrt{3}} = (3^4)^{1/3} - (3^2)^{1/6} + (4 \cdot 3)^{1/2} - (3^3)^{1/6} - (3 \cdot 3^{1/2})^{1/3} =$
$= 3^{4/3} - 3^{1/3} + 2 \cdot 3^{1/2} - 3^{1/2} - (3^{3/2})^{1/3} = 3 \cdot 3^{1/3} - 3^{1/3} + 2 \cdot 3^{1/2} - 3^{1/2} - 3^{1/2} = 2 \cdot 3^{1/3}$

d) $\pi^{\sqrt{2}}\pi^{\sqrt{8}}\pi^{-\sqrt{18}} = \pi^{\sqrt{2}+2\sqrt{2}-3\sqrt{2}} = \pi^0 = 1$

□

### 1.3.1 Övningar

**1.3.1** Beräkna

a) $5^2$ b) $2^5$ c) $(-3)^4$ d) $7^0$

**1.3.2** Skriv som bråktal på enklaste form, utan potenser

a) $2^{-2}$ b) $(-3)^{-3}$ c) $\dfrac{2^5 \cdot 3^{-7} \cdot 105 \cdot (-7)^{-2}}{2^3 \cdot 3^{-5} \cdot 5}$

**1.3.3** Förenkla

a) $27^{1/3}$ b) $4^{-0,5}$ c) $(\sqrt{8})^{2/3}$ d) $3^{1/2}/9^{-3/4}$

e) $(0,0016)^{-0,25}$ f) $(2^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$ g) $13^{\sqrt{12}}13^{\sqrt{27}}13^{-\sqrt{75}}$

## 1.4 Algebra

En grundläggande algebraisk metod är det som kallas *faktorisering*: att skriva om ett givet uttryck som en produkt av andra. Det är en viktig metod vid bl a förenklingar och lösning av ekvationer.

Följande omskrivningar av algebraiska uttryck bör vara välbekanta:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \quad \textbf{(kvadreringsregel)}\\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \quad \textbf{(kvadreringsregel)}\\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \quad \textbf{(konjugatregeln)}\end{aligned}$$

Dessa regler är *omskrivningar* (eller *identiteter, formler*) d v s vänsterleden och högerleden ger samma resultat oavsett vilka värden som ges till variablerna $a$ och $b$.

Alla kan ses som sätt att faktorisera högerledet. Konjugatregeln säger t ex att en skillnad mellan två kvadrater kan skrivas som en produkt av två saker.

**Exempel.** Dessa regler kan vara användbara även i konkret räkning (aritmetik):

a) $21^2-19^2=(21+19)(21-19)=40\cdot 2=80$

b) $26^2=(30-4)^2=30^2-2\cdot 30\cdot 4+4^2=900-240+16=676$

$\square$

**Exempel.** Utveckla $(m^4-3)^2+(m^4+3)^2$.

*Lösning.* Vi har med kvadreringsreglerna:

$$(m^4-3)^2+(m^4+3)^2 \quad = \quad (m^4)^2-2m^4 3+3^2+(m^4)^2+2m^4 3+3^2=2m^8+18$$

$\square$

**Exempel.** Förenkla $(x^2+3)(x^2-3)(x^4+9)$.

*Lösning.* Två användningar av konjugatregeln ger:

$$(x^2+3)(x^2-3)(x^4+9) \quad = \quad ((x^2)^2-3^2)(x^4+9)=(x^4-9)(x^4+9)=(x^4)^2-9^2=x^8-81.$$

$\square$

**Exempel.** Faktorisera $18x^2y^7-8x^4y$.

*Lösning.* Vi ser att vi kan bryta ut $2x^2y$ ur de båda termerna:

$$18x^2y^7-8x^5y \quad = \quad 2x^2y(9y^6-4x^2)$$

De två termerna i parentesen är båda kvadrater: $9y^6=(3y^3)^2$ och $4x^2=(2x)^2$. Vi kan därför faktorisera ytterligare med konjugatregeln:

$$18x^2y^7-8x^5y \quad = \quad 2x^2y(9y^6-4x^2)=2x^2y((3y^3)^2-(2x)^2)=2x^2y(3y^3-2x)(3y^3+2x).$$

$\square$

**Exempel.** Förenkla $\dfrac{x^3-9x}{x^2-6x+9}$.

*Lösning.* Vi faktorisera i täljare och nämnare för att eventuellt hitta en gemensam faktor. Vi tar hjälp av kvadreringsregeln och konjugatregeln:

$$\frac{x^3-9x}{x^2-6x+9} \quad = \quad \frac{x(x^2-3^2)}{x^2-2x\cdot 3+3^2}=\frac{x(x-3)(x+3)}{(x-3)^2}=\frac{x(x+3)}{x-3},$$

efter förkortning med $x-3$. $\square$

Observera faktoriseringen i nämnaren i det sista exemplet! Den kan tyckas vara långsökt, men den är faktiskt gjord med en standard metod som också är användbar i många andra sammanhang. Metoden kalla *kvadratkomplettering*.

Idén här är att skriva om ett uttryck av grad två på ett speciellt sätt. Man vill skriva $x^2+ax+b$ så att det i stället ser ut som $t^2+c$, för lämpligt $t$ och $c$.

Man har

$$\underline{x^2+ax}+b \quad = \quad \underline{(x+a/2)^2}-(a/2)^2+b$$

Lägg märke till att om man utvecklar parentesen $(x+a/2)^2$ så får man $\underline{x^2+ax}+(a/2)^2$. Omskrivningen kallas att *kvadratkonmplettera* andragradsuttrycket.

**Exempel.** Kvadratkomplettera $x^2-6x+9$.

*Lösning.*

$$\underline{x^2-6x}+9 \quad = \quad \underline{(x-3)^2}-3^2+9=(x-3)^2$$

$\square$

**Exempel.** Bestäm minsta värdet av $x^2+11x+31$.

*Lösning.*

$$\underline{x^2+11x}+31 \quad = \quad \underline{(x+11/2)^2}-121/4+124/4=(x-11/2)^2+3/4$$

Nu ser vi att uttrycket skrivits som en kvadrat plus $3/4$. Eftersom en kvadrat aldrig är negativ kan uttrycket värde aldrig bli mindre än $3/4$, oavsett vad $x$ sätts till. Om vi sätter $x=11/2$ blir kvadraten noll, så uttryckets minsta värde är (faktiskt) $3/4$. Detta ser vi alltså lätt efter kvadratkomplettering, men svårligen före. $\square$

**Exempel.** Lös ekvationen $0=x^2+6x+7$

Detta är förstås en hederlig andragradsekvation som vi har en välbekant formel för att lösa. Problemet med formler är att de kan vara svåra att minnas. Man klarar faktiskt uppgiften med kvadratkomplettering, som är en metod, och därför fastnar bättre i minnet.

*Lösning.* Vi kvadratkompletterar i högerledet:

$$0 \quad = \quad x^2+6x+7=(x+3)^2-9+7=(x+3)^2-2=(x+3)^2-(\sqrt{2})^2.$$

Vi har skrivit om 2 som en kvadrat, för då har vi en skillnad mellan två kvadrater i högerledet och kan använda konjugatregeln. Vi får:

$$0 \quad = \quad (x+3)^2-(\sqrt{2})^2=(x+3-\sqrt{2})(x+3+\sqrt{2}).$$

Vi har nu faktoriserat andragradsuttycket (med kvadratkomplettering följt av konjugatregeln). Höger ledet är en produkt av två parenteser. Produkten ska bli noll. Det inträffar när nån av parenteserna blir noll. Den första blir noll när $x=-3+\sqrt{2}$ och den andra när $x=-3-\sqrt{2}$. Vi har alltså löst ekvationen och fått lösningarna

$$x=-3\pm\sqrt{2}.$$

$\square$

Att lösa andragradsekvationer $0=x^2+px+q$ är en vanligt förekommande uppgift, så man kanske vill gärna vill använda formeln för hur man löser en sådan. Har man glömt den kan man lätt komma fram till den med samma teknik som i exemplet:

$$\begin{aligned}0 \quad &= \quad x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\right)=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)^2= \\ &= \quad \left(x+\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right),\end{aligned}$$

under förutsättning att uttrycket under rottecknet inte är negativt (då saknas reella lösningar). Det ger oss lösningsformeln

> Ekvationen
>
> $$0=x^2+px+q$$
>
> har, om $(p/2)^2-q$ inte är negativt, lösningarna
>
> $$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

**Exempel.** Lös ekvationen $(3-x)(x+8)=x^2+12$

Som den står är inte detta en andragradsekvation som vi kan använda formeln på. Vi behöver först fixa noll i ena ledet. Sedan se till att det står 1 framför $x^2$.

*Lösning.* Utveckling ger

$$\begin{aligned}
24-5x-x^2 &= x^2+12 \quad \text{Fixar noll i vänster led:}\\
0 &= 2x^2+5x-12 \quad \text{Delar båda sidor med 2:}\\
0 &= x^2+5/2-6 \quad \text{Använder formeln:}\\
x &= -5/4\pm\sqrt{25/16+96/16} = -5/4\pm\sqrt{121/16} = -5/4\pm 11/4
\end{aligned}$$

Lösningarna är alltså $x = 6/4 = 3/2$ och $x = -16/4 = -4$. □

I tillämpningar är det inte ovanligt att man kommer fram till tämligen komplicerade algebraiska samband mellan olika parametrar, eller variabler. Man kan komma fram till dem genom så väl ämnesteoretiska eller matematiska resonemang, som experimentella studier. Man kan då vara intresserad av att uttrycka en av parametrarna med hjälp av de övriga.

**Exempel.** I en studie har man kommit fram till att sambandet

$$\frac{a}{M-a} = h,$$

gäller för vissa parametrar $a$, $M$ och $h$. Man vill veta vad $a$ är uttryckt med hjälp av $M$ och $h$.

*Lösning.* Vi multiplicerar båda sidor av sambandet med $M-a$ och får $a = h(M-a)$, eller $a = hM - ha$.

Vi samlar det som innehåller $a$ på denna sidan och får $a + ha = hM$, eller $a(1+h) = hM$. Division med $1+h$ ger nu $a = hM/(1+h)$.

Men om $h = -1$ har vi gjort fel, för i så fall är $1+h = 0$ och division med 0 är inte tillåtet. Vi tittar därför speciellt på detta. Om $h = -1$, har vi från $a = hM - ha$ att $a = -M + a$, d v s att $M = 0$, och att inget speciellt värde på $a$ kan fås. Det betyder att det givna sambandet inte bestämmer vad $a$ ska vara om $h = -1$. Vi får alltså

$$a = \frac{hM}{1+h}, \quad \text{om } h \neq -1.$$

□

**Exempel.** Man tror sig vet att

$$\frac{N}{d-e} = e - N,$$

där $N$, $d$ och $e$ är parametrar i ett experiment. Man vill veta hur dels $e$ och dels $N$ kan utryckas med de övriga parametrarna för att kunna genomföra en fortsatt försöksplanering.

*Lösning.* Vi börjar med att försöka lösa ut $e$ ur sambandet. Multiplikation med $d-e$ leder till $N = (e-N)(d-e) = -e^2 + (N+d)e - Nd$. Vi ordnar 0 i ena ledet:

$$0 = e^2 - (N+d)e + N(d+1),$$

som är en andragradare. Den har lösningarna

$$\begin{aligned}
e &= \frac{N+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(N+d)^2}{4} - N(d+1)} = \frac{N+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(N+d)^2}{4} - \frac{4N(d+1)}{4}} = \\
&= \frac{N+d}{2} \pm \sqrt{\frac{N^2+2Nd+d^2-4N(d+1)}{4}} = \frac{N+d}{2} \pm \frac{\sqrt{N^2-2N(d+2)+d^2}}{2}.
\end{aligned}$$

Här ser vi att det finns två värden för $e$ som uppfyller det givna sambandet, när $N$ och $d$ är givna. Men också att det som står under rottecknet inte får vara negativt. Det betyder att sambandet säger något om förhållandet mellan $N$ och $d$ oberoende av $e$. T ex kan $N$ och $d$ inte inte vara samma positiva tal för då får man $-4N$ under rottecknet.

Vi löser nu ut $N$ ur sambandet. Vi samlar det som innehåller $N$ på ena sidan och får

$$e = \frac{N}{d-e} + N = \Big(\frac{1}{d-e} + 1\Big)N = \frac{1-e+d}{d-e}N.$$

Vi multiplicerar båda sidor med det inverterade värdet till bråket och får

$$N = \frac{(d-e)e}{1-e+d},$$

som är giltigt under förutsättning att $1-e+d \neq 0$, d v s om $e \neq 1+d$.

Om $e = 1+d$ får vi från $e = \frac{1-e+d}{d-e}N = 0$ att $e = 0$, $d = -11$, som i det ursprungliga sambandet ger $N/-1 = -N$,d v s $N$ kan vara vadsomhelst.

□

### 1.4.1 Övningar

**1.4.1** Förenkla

a) $3c-(2a+c-5b)-(2b-2a)$ b) $7a-2b-[(3a-c)-(2b-3c)]$

c) $a^2b^4c\cdot(-3ac^2)\cdot 9abc$ d) $(3x^2y)^3$

e) $(6-x)(x+6)$ f) $(a^2+y)(a^2-y)$

**1.4.2** Multiplicera ihop

a) $(2x-y)(x+2y)$ b) $(2x-y)(x+2y)(x-y)$

**1.4.3** Förenkla

a) $(2a+2b)/(b^2-a^2)$ b) $(x-y)^3/(y-x)^5$ c) $(a^4-b^4)/(a-b)$

**1.4.4** Lös följande ekvationer

a) $2x-3 = 4(x-5)$ b) $(x-2)^2 = x$ c) $x^2+3x-2 = 2x^2-5x+5$

d) $x^2 = 3x$ e) $3x^2-x+6 = 8$ f) $14x^2-23x+3$.

**1.4.5** Kvadratkomplettera

a) $x^2+4x-3$ b) $x^2-3x+2$ c) $x^2-x/3+5$.

**1.4.6** Bestäm

a) minsta värdet av $x^2+3x+4$ b) största värdet av $2x-3-x^2$.

**1.4.7** Lös ut $x$ ur följande samband

a) $c(x-1)a = 0$ b) $a(bx-1) = c$ c) $x(1-x/a)-cx = 0$.

d) $c^2(x-1)d = c^2$ e) $c = ax(1-x/d)$ om man vet att $d = 1/2$.

# 2 Funktioner

En *funktion* är en regel som till vissa av de reella talen ordnar (till vart och ett av dem) ett bestämt värde.

Regeln kan alltså inte alltid användas på alla reella tal. Samlingen av de tal som den går att använda på kallas funktionens *defintionsmängd*. Samlingen av de värden man kan få när man använder funktionen kallas funktionens *värdemängdmängd*.

Typiskt betecknas regeln med nån av bokstäverna $f$, $g$ eller $h$. Om $f$ är definierad för det reella talet $x$ så betecknar $f(x)$ *värdet* av $f$ i talet $x$.

**Exempel.** Låt $f$ vara funktionen som till ett positivt reellt tal $x$ ordnar det största heltalet som är mindre än $x$. Då är t ex $f(\pi) = 3$, $f(4,5) = 4$ och $f(11/7) = 1$. □

Det finns åtminstone tre olika sätt att tala om vad en specifik funktion ska vara:

1. Funktionen kan ges genom formler för hur $f(x)$ ska beräknas utgående från $x$.
2. Funktionen kan ges genom att man skriver upp en tabell av värden som $f$ ska ha för olika tal $x$.
3. Funktionen kan ges (som i exemplet ovan) genom att man i ord talar om vad $f(x)$ ska vara utgående från $x$.

Ett sätt, som är vanligt förekommande men som i matematisk mening inte är korrekt, är att ge den genom att rita upp en graf. Anledningen är att man inte av en graf kan utläsa den fullständiga precision som krävs för att man ska kunna tala om vad $f(x)$ är när $x$ är givet.

**Exempel.** Definiera funktionen $g$ genom att låta $g(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$.

Det betyder att t ex $g(3) = 3/8$ och att $g(-2) = -2/3$. Om inget annat sägs när en funktion är given av formler så används konventionen att defintionsmängden är den största mängd av tal för vilka man kan använda den specificerade regeln (i detta fall att man till $x$ ska ordna $x/(x^2-1)$). Det betyder att regeln går att använda på alla tal utom de som gör nämnaren till noll. Definitionsmängden i detta fall är alltså alla reella tal utom talen $\pm 1$. □

En funktion kan specificeras genom att man använder olika formler för olika reella tal.

**Exempel.** Definiera funktionen $h$ genom

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{om} \quad x \geq 0 \\ -x^3 & \text{om} \quad x < 0 \end{cases}$$

Här är t ex $h(4) = 16$ medan $h(-5) = -25$ och defintionsmängden alla reella tal. □

**Exempel.** Man har mätt högsta dagstemperaturen under tio dagar i december 2008 i en viss ort och fått

| Datum | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Temperatur | 5 | 7 | 6 | 5 | 3 | 9 | 11 | 4 | 2 | 5 |

Genom att ge tabellen har man definierat en funktion, som vi kan kalla $T$. Defintionsmängden för $T$ är de tio talen mellan 19 och 28. Vi har t ex att $T(24) = 9$ och att $T(22) = T(28) = 5$.

Det vore inte särskilt intressant att försöka skriva upp en formel för $T(x)$! □

**Exempel.** En läkare gör en EKG-undersökning av en patient. På en bildskärm syns grafen av en funktion som till tiden $t$ ordnar ett tal $f(t)$, som anger den elektriska spänningen som hjärtmuskelns sammandragningar ger upphovtill vid tiden $t$.

Den läkare är inte född som skulle vilja se en formel för $f(t)$. Grafens utseende däremot av avgörande intresse. □

Om flera variabler uppfyller ett visst samband kan man i bland säga ett *en variabel är en funktion av andra*. Det betyder i så fall att den är entydigt bestämd av värdena på andra variabler. Ett exempel är den *ideala gaslagen*:

$$pV = nRT,$$

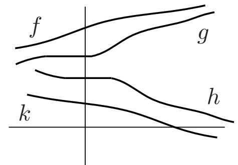
där $p$ är gasens tryck, $V$ volymen och $T$ är temperaturen. Konstanten $n$ är antalet mol av gasen och $R$ är en konstant som kallas Avogadros konstant (eller gaskonstanten). Här kan man se att $p$ och $V$ bestämmer gasens temperatur $T$, så $T$ är en funktion av två reella tal. Vid konstant volym $V$ är $p$ en funktion av $T$ : $p = nRT/V$.

En variabel $y$ är *proportionell* mot $x$ om $y = kx$, för någon konstant $k$. Vid konstant volym i en idealgas är trycket proportionellt mot temperaturen. Det betyder att trycket ökar när temperaturen ökar.

En variabel $y$ är *omvänt proportionell* mot $x$ om $y = k/x$, för någon konstant $k$. Vid konstant temperatur i en idealgas är trycket omvänt proportionellt mot volymen. Det betyder att trycket avtar när volymen ökar.

En funktion är

1. växande om $f(a) \leq f(b)$ närhelst $a < b$,
2. strängt växande om $f(a) < f(b)$ närhelst $a < b$,
3. avtagande om $f(a) \geq f(b)$ närhelst $a < b$,
4. strängt avtagande om $f(a) \geq f(b)$ närhelst $a < b$,

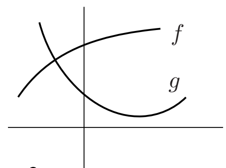



Figur 2: $f$ är strängt växande, $g$ är växande, $h$ är avtagande och $k$ är stärngt avtagande

Man kan också tala om att en funktion är växande/avtagande på ett visst intervall på reella tallinjen.

En funktion är

1. konvex på ett intervall om grafen vänder uppåt där,
2. konkav på ett intervall om grafen vänder neråt där.




Figur 3: $f$ är konkav, $g$ är konvex.

Observera att en växande funktion kan vara konkav men också konvex. Lika så kan en funktion vara avtagande och konvex men också konkav. Begreppen växande/avtagande konvex/konkav är alltså oberoende av varandra.

Vi kommer i följande avsnitt att ge en katalog över några viktiga typer av funktioner (men utelämnar de trigonometriska)

### 2.0.2 Övningar

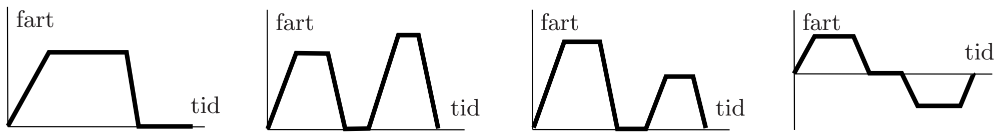
**2.0.1** Matcha de fyra graferna nedan med en av följande historier:

a) Jag fick punktering under bilresan. Jag stannade och bytte hjul. Sen var jag tvungen att snabba på för att hinna fram i tid.

b) Min bli gick sönder så jag parkerade den i vägrenen.

c) När jag lämnat paketet på posten körde jag hem igen.

Hitta på en egen historia till den återstående grafen.




**2.0.2** I en stad är antalet (mätt i 1000-tal) invånare en funktion $f$ av antalet år efter 1960. Vad betyder $f(35) = 53$?

**2.0.3** Värdet (mätt i 1000-tal kronor) på en bil är en funktion $f$ av bilens ålder (mätt i år).

a) Vad betyder $f(5) = 63$?

b) Är $f$ växande eller avtagande?

c) Är $f$ konvex eller konkav?

## 2.1 Algebraiskt givna funktioner

Vi tittar först på funktioner som bildas genom att man använder de fyra räkneoperationerna på en variabel tillsammans med konstanter.

### 2.1.1 Linjära funktioner

En funktion av formen $f(x) = kx + m$, där $k$ och $m$ är konstanter, kallas en *linjär funktion*. Grafen till en sådan är en rät linje som har ekvationen $y = kx + m$. Man säger att variabeln $y$ beror linjärt på variabeln $x$.

Vi ser att $f(0) = m$ så $(0, m)$ är grafens skärningspunkt med $y$-axeln. När $0 = kx + m$ är $x = -k/m$, så $(-k/m, 0)$ är skärningspunkten mellan grafen och $x$-axeln.

Om man känner till två av värdena till en linjär funktion så kan man bestämma konstanterna $k$ och $m$

**Exempel.** Kostnaden för en fastighets vatten och avlopp är en linjär funktion av volymen förbrukat vatten. Kostnaden för en kubikmeter är 1000 kr och för två är den 1800 kr. Vad är kostnaden för 3/4 kubikmeter och vad är konstande för 0 kubikmeter.

*Lösning.* Vi låter $f(v) = kv + m$ vara konstaden för $v$ kubikmeter. Vi vet att

$$\begin{cases} 1000 & = & k \cdot 1 + m \\ 1800 & = & k \cdot 2 + m \end{cases}$$

Tar vi skillnaden mellan den nedersta likheten och den övre får vi $800 = k$. Sätter vi in det i den översta får vi $m = 200$, så att

$$f(v) = 800v + 200$$

Det betyder att kostnaden för 3/4 kubikmeter är $f(3/4) = 600 + 200 = 800$ kronor. Den fasta kostnaden är $f(0) = 200$ kronor. □

En linjär funktion $f(x) = kx + m$ är växande om *riktningskoefficienten* $k$ är $\geq 0$ och avtagande om den är $\leq 0$.

### 2.1.2 Polynom

Ett *monom* i variabeln $x$ är en funktion av formen $f(x) = kx^n$, är $k$ är en konstant och $n$ ett konstant naturligt tal. Om $k \neq 0$ har monomet *grad* $n$.

**Exempel.** $f(x) = \sqrt{2}x^5$ är ett monom av grad 5, men varken $x^{-2}$ eller $x^{5/2}$ är monom. □

En funktion $f$ är *udda* om $f(-x) = -f(x)$ för alla $x$. Om i stället $f(-x) = f(x)$ så är $f$ *jämn*. Ett monom av jämn grad är en jämn funktion och ett monom av udda grad är en udda funktion.

En funktion $p$ är ett *polynom* om den ges av en formel som är en summa av monom av olika grader. Den högsta graden bland monomen är *polynomets grad*.

**Exempel.** Om $p(x) = 2 + 3x + 4x^3 - 3x^5$, så är $p$ ett polynom av grad 5. □

Polynom är i allmänhet varken udda eller jämna funktioner.

### 2.1.3 Rationella funktioner

En funktion är *rationell* om den ges av en formel som är en kvot mellan två polynom.

**Exempel.** Funktionen $f$ som ges av

$$f(x) = \frac{2 - x - x^2}{3 - 8x + x^2}$$

är en rationell funktion. □

Definitionsmängden till en rationell funktion består av alla reella tal utom de som är nollställen till nämnaren. I exemplet ovan är funktionen definierad för alla $x$ utom de som löser $0 = x^2 - 8x + 3$, d v s utom i $x = 4 \pm \sqrt{13}$.

### 2.1.4 Övningar

**2.1.1** En linjär funktion $f$ har en graf som går genom punkterna $A$ och $B$. Bestäm $f(2)$, $f(t)$ och avgör om $f$ är växande eller avtagande om

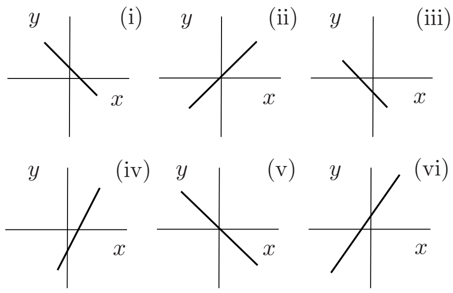
a) $A = (0,2)$ och $B = (1,1)$, b) $A = (3,5)$ och $B = (-2,1)$, c) $A = (-3,5)$ och $B = (4,-1)$,

**2.1.2** I figuren nedan illustreras de sex linjerna med ekvationerna

a) $y = -2,72x$ b) $y = 0,001 + 0,001x$ c) $y = 27,9 - 0,1x$

d) $y = 0,1x - 27,9$ e) $y = -5,7 - 200x$ f) $y = x/3,14$

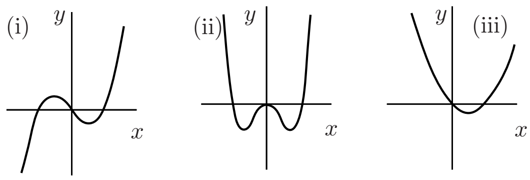
Skalorna längs $x-$ och $y$-axlarna kan vara olika. Vilken linje hör till vilken illustration?




**2.1.3** I figuren nedan illustreras graferna till de tre polynomen

a) $x^2 - x$ b) $x^3 - x$ c) $x^4 - x^2$

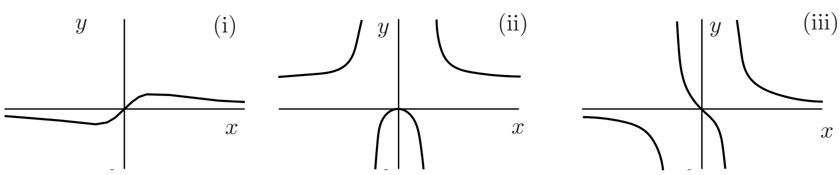
Vilken graf hör till vilket polynom?




**2.1.4** I figuren nedan illustreras graferna till de tre rationella funktionerna

a) $\dfrac{x}{x^2-1}$ b) $\dfrac{x}{x^2+1}$ c) $\dfrac{x^2}{x^2-1}$

Vilken graf hör till vilken rationell funktion?



## 2.2 Potens- och exponentialfunktioner

Vi lämnar de funktioner som definieras enbart med hjälp av de fyra räkneoperationerna och en variabel $x$.

### 2.2.1 Potensfunktioner

Potensfunktioner är generaliseringar av monom; varje monom är en potensfunktion.

En funktion $f$ är en *potensfunktion* om den ges av en formel av typen

$$f(x) = kx^a.$$

T ex är $f(x) = 3x^{3/2}$ och $g(x) = \sqrt{3}x^{-1/2} = \sqrt{3}/\sqrt{x}$ potensfunktioner.

**Exempel.** Mantelarean av ett klot med volym $V$ är en potensfunktion av $V$.

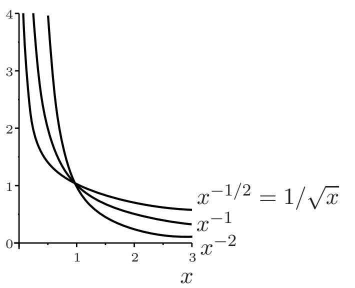
Om $r$ är klotets radie gäller att $A = 4\pi r^2$ och $V = 4\pi r^3/3$, så att både arean och volymen är monom-funktioner av variabeln $r$.

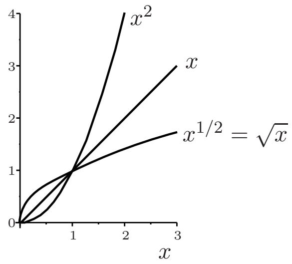
Vi ser att $A^3/V^2 = 36\pi$, så att $A = \sqrt[3]{26\pi}V^{2/3}$. Alltså är $A$ en potensfunktion av $V$. □

Att bestämma defintionsmängden till potensfunktion $f(x) = kx^a$ kan vara lite klurigt. Den beror på vad $a$ är. Om $a$ är ett positivt heltal t ex 2 är funktionen $f(x) = kx^2$ definierad för alla $x$. Om $a = 1/2$ är $f(x) = k\sqrt{x}$ bara definierad på intervallet $[0,\infty)$, d v s alla reella tal utom de negativa. Om $a = -1$ är $f(x) = k/x$ definierad för alla $x$ utom $x = 0$.

Alla potensfunktioner är åtminstone definierade på intervallet $(0,\infty]$.

Figuren illustrerar grafer till potensfunktioner $f(x) = x^a$ för några olika värden på $a$.




Observera att potensfunktionen är strängt avtagande på $(0,\infty)$ om $a < 0$ och strängt växande om $a > 0$.

**Exempel.** Volymen $V$ och arean $A$ av en (vuxen) individ i en specifik djurart är proportionella mot kubiken respektive kvadraten på individens längd $l$.

Detta kan man förstå om man tänker sig att individen delas in i ett stort antal kuber som aproximerar dess volym noga. Om längen ändras med en faktor i en kub ändars volymen med kubiken av faktorn. På samma sätt med arean.

Man får alltså att $V(l) = kl^3$ och $A(l) = ml^2$, för några konstanter $k$ och $m$. Av detta följer att $A = (m^3/k^2)^{1/3}V^{2/3}$ eller

$$A = cV^{2/3},$$

om vi sätter $c$ till konstaten $m^3/k^2$. Det betyder att en individs area är en potensfunktion av individens volym. Man läggermärke till att när en individ växer till i volym så växer arean långsammare.

Detta har konsekvenser för hur stora olika djurarter kan vara. För en encellig organism sker utbytet av födoämnen och slaggprodukter genom arean, medan metabolismen sker i det inre och beror på volymen. Förhållandet $V/A = cV^{1/3}$ kan därför inte vara förstort; metabolismen kan inte vara större än möjligheten att uppta födoämnen. Den kan heller inte vara för liten, för då skulle metabolismen inte räcka till för att stödja arean. Det betyder att $cV^{1/3}$ inte kan understiga ett visst värde och inte överstiga ett annat. Därmed är den möjliga volymen för organismen begränsad av två kritiska värden.

Resonemanget gäller även om man betraktar flercelliga organismer och till arean räknar arean av organ som stödjer metabolismen med upptag och utsöndring, t ex tarmar och lungor. Teskedsgumman kan inte finnas för hennes area skulle vara för stor i förhållande till hennes volym. □

### 2.2.2 Exponentialfunktioner

Antag att vi får informationen att antalet bakterier i en viss bakteriekoloni växer med $r\%$ varje timme. Om antalet bakterier är $N$ stycken vid ett visst tillfälle så är de då $(1+r/100)N$ efter en timme och $(1+r/100)^2N$ efter två timmar, o s v.

Men tillväxten sker sker helat tiden så vi kan vara intresserade av att veta hur många bakterierna är efter säg 10 minuter. Ett sätt att få en uppfattning om detta vore att dela $r$ med 6 (eftersom det går $6\cdot 10$ minuter på en timme). Och chansa på att de är ungefär $(1+r/(6\cdot 100))N$ efter 10 minuter.

Efter en timme skulle de då vara $(1+r/(6\cdot 100))^6N = \left((1+r/6\cdot 100))^{6\cdot 100/r}\right)^{r/100}N$. Detta är inte precis samma som $(1+r/100)N$, men det struntar vi i just nu.

Vi behöver inte stanna vid sex delar av en timme utan kan tänka oss att vi delar den i $n$ lika delar. Med motsvarande resonemang skulle vi efter en timme få

$$\left((1+r/(n\cdot 100))^{n\cdot 100/r}\right)^{r/100}N.$$

Uttrycket $(1+r/(n\cdot 100))^{n\cdot 100/r}$ är intressant här. För att förenkla för oss sätter vi $h = r/(n\cdot 100)$ och ser att $h$ kommer allt närmare 0 ju större $n$ blir. Detta brukar skriva $h\to 0$, när $n\to\infty$ och utläses "$h$ går mot 0 när $n$ går mot oändligheten.

Förenklingen ger att vi vill undersöka $(1+h)^{1/h}$ när $h$ närmar sig 0.

En beräkning med programvara ger följande tabell:

| $h$ | 0.1 | 0.01 | 0.001 | 0.0001 | 0.00001 | 0.000001 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $(1+h)^{1/h}$ | 2.59374... | 2.70481... | 2.71692... | 2.71814... | 2.71826... | 2.71828... |

Man kan visa att $(1+h)^{1/h}$ närmar sig ett speciellt tal, som man betecknar $e$, när $h\to 0$. Talet $e$ kallas *gränsvärdet* av $(1+h)^{1/h}$. Det skrivs

$$\boxed{e = \lim_{h\to 0}\left(1+h\right)^{\frac{1}{h}}}$$

och utläses limes av $(1+h)^{1/h}$ när $h$ går mot 0. Efter en timme skulle bakterierna nu var

$$e^{r/100}N.$$

Här har det hänt nåt viktigt! För $r$ har flyttat från basen till exponenten. Om vi nu delar timmen i $n$ delar och lika så $r$ får vi efter en timme får vi en liket som faktiskt stämmer:

$$(e^{r/(n\cdot 100)})^nN = e^{r/100}N$$

Vi kan lätt beräkna antalet bakterier vid vilken tidpunkt som helst enligt:

$$\text{antalet efter } t \text{ timmar} = e^{tr/100}.$$

Vi har fått en funktion $f(t) = e^{tr/100}N$ som talar om hur många bakterierna är efter $t$ timmar, där $t$ kan vara vilket reelt tal som helst.

Enda problemet är att det inte stämmer exakt efter en timme:

$$e^{r/100} \neq (1+r/100)$$

Lösningen på detta är att vi ska använda ett annat värde på $r$ när vi skriver det i exponenten än när vi skriver det i basen. Precis hur man beräknar detta värde ska vi återkomma till i avsnittet om logaritmer.

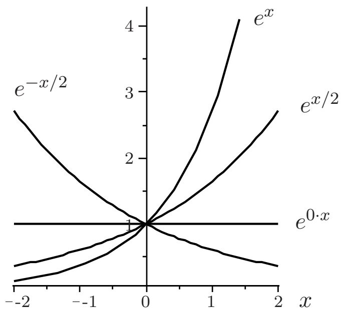
Det $r$ vi använde från början mätte den procentuella *tillväxten per timme*. När vi använder $r$ i exponenten mäter det den *procentuella kontinuerliga tillväxten*.

En funktion $f$ är en *exponentialfunktion* om den ges av en formel

$$f(x) = ma^{kx},$$

där $a > 0$, $m$ och $k$ är konstanter som inte är 0. Observera skillnaden mot potensfunktion; i en sådan står variabeln i basen, medan den står i exponenten i en exponentialfunktion. Enligt räknereglerna för potenser kan en exponentialfunktion också skrivas $f(x) = mb^x$ där $b$ är konstanten $b = a^k$.

Den i särklass vanligast förekommande exponetialfunktionen i tillämpningar är den när $a = e$. I själva verket kan varje annan exponentialfunktion skrivas om med $e$ som bas, som vi kommer att se i avsnittet 2.4 om logaritmfunktioner.




I figuren här intill ser du grafen till exponentialfunktionen $f(x) = e^{kx}$ för några olika värden på $k$.

Funktionen är definierad för alla reella tal $x$. Den är konvex och avtagande om $k < 0$ och växande om $k$. Man talar om *exponentiellt avtagande* respektive *exponentiellt växande*. Konstanten $k$ kallas den *kontinuerliga förändringstakt* med vilken funktionen avtar eller växer.

Observera att $f(x) = e^{kx}$ alltid är positiv och att en exponentiellt avtagande funktion närmar sig 0 när $x$ blir stort, d v s $x \to \infty$. En exponentiellt växande funktion går mot 0 när $x \to -\infty$. Lägg också märke till att $f(0) = 1$.

Från räknereglerna för potenser följer räkneregler för en exponentialfunktion $f(x) = e^{kx}$:

$f(x + x_0) = f(x)f(x_0)$

$f(mx) = (f(x))^m$

**Exempel.** Raderna i tabeller anger mätvärden för en linjär funktion, en potensfunktion och en exponentialfunktion. Ange en formlen för var och en av funktionerna.

| $x$ | 1 | 1,2 | 1,4 | 1,6 | 1,8 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 3,0000 | 5,1840 | 8,2320 | 12,2880 | 17,4960 | 24,0000 |
| $g(x)$ | 27,0000 | 41,8998 | 65,0221 | 100,9042 | 156,5877 | 243,0000 |
| $h(x)$ | 1,0000 | 1,8000 | 2,6000 | 3,4000 | 4,2000 | 5,0000 |

*Lösning.* Mätvärdena på variabeln är jämnt fördelade: de är $x = 1 + n \cdot 0,2$ där $n = 0, 1, \ldots, 5$.

> För en linjär funktion gäller då att skillnaden mellan värdet i två på varandra följande $x$-värden är konstant. För en exponentialfunktion gäller då att kvoten mellan värdet i två på varandra följande $x$-värden är konstant.

Genom att titta i tabellen ser vi att skillnaden mellan två på varandra följande funktionsvärden är konstant (0,8000) bara för $h(x)$, så den är linjär.

Vi ser också att kvoten mellan två på varandra följande funktionsvärden för $f(x)$ ger :

$$\frac{5,1840}{3,0000} = 1,7280,\ \frac{8,2320}{5,1840} = 1,5880,\ \frac{12,2880}{8,2320} = 1,4927,\ \frac{17,4960}{12,2880} = 1,4238,\ \frac{243,0000}{12,2880} = 1,3717.$$

Det betyder att $f(x)$ inte är en exponentialfunktion utan en potensfunktion. Alltså är $g(x)$ exponentialfunktionen. Vi tittar på de successiva kvoterna av funktionsvärden för att vara på den säkra sidan:

$$\frac{41,8998}{27,0000} = 1,5518,\ \frac{65,0221}{41,8998} = 1,5518,\ \frac{100,9042}{65,0221} = 1,5518,\ \frac{156,5877}{100,9042} = 1,5518,\ \frac{243,0000}{156,5877} = 1,5518.$$

Funktionen $f$ ges alltså av $f(x) = kx^a$ för några konstanter $k$ och $a$. Av tabellen får vi $3 = f(1) = k$, och $24 = f(2) = k2^a = 3 \cdot 2^a$, så $2^a = 8$ och $a = 3$. Alltså

$$f(x) = 3 \cdot x^3.$$

Funktionen $g$ ges av $g(x) = mb^x$. Av tabellen ser vi $27 = f(1) = mb$ och $243 = f(2) = mb^2$. Kvoterna mellan dessa ger $b = 243/27 = 9$ så att $27 = m \cdot 9$ och $m = 3$. Alltså

$$g(x) = 3 \cdot 9^x.$$

Funktionen $h$ ges av $h(x) = kx + m$. Av tabellen ser vi $1 = h(1) = k + m$ och $5 = h(2) = k \cdot 2 + m$. Skillnaden mellan dessa ger $4 = k$, som ger $m = -3$. Alltså

$$h(x) = 4x - 3.$$

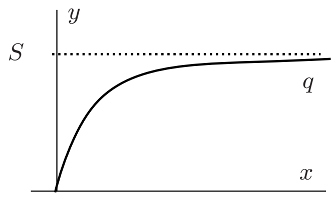
□

| |
|---|
| Generellt gäller att två mätpunkter på grafen räcker för att bestämma en formel för så väl en linjär funktion, en potensfunktion som för en exponentialfunktion. |

**Exempel.** En patient får en medicin via dropp. Kvantiteten $q(t)$ av den verksamma substansen i blodet vid tiden $t$ ges då av $q(t) = S(1 - e^{-kt})$, där $k$ och $S$ är några positiva konstanter. Vad betyder $S$? Skissa grafen till $q$.

*Lösning.* Eftersom $k > 0$ gäller att $e^{-kt} \to 0$, när $t \to \infty$ (exponentiellt avtagande). Det betyder att $S$ är den kvantitet som finns i blodet långsiktigt: $S$ är mättnadskvantiteten.

Om vi gör en omskrivning får vi $Se^{-kt} = S - q(t)$ som är exponentiellt avtagande. Det betyder att $q(t)$ närmar sig $S$ på ett sätt som gör $S - q(t)$ exponentiellt avtagande. I figuren är Linjen som är parallell med $t$-axeln och går genom $S$ på $q$-axeln streckad. Det är rimligt att $q(t)$ närmar sig ett stabilt värde $S$, trots att mer tillförs hela tiden, eftersom substansen också utsöndras ur kroppen.




□

### 2.2.3 Övningar

**2.2.1** En potensfunktion $f$ har en graf som går genom punkterna $A$ och $B$. Bestäm $f(2)$ och om $f$ är växande/avtagande, konkav/konvex när

a) $A = (1,4)$ och $B = (4,2)$  b) $A = (2,3)$ och $B = (6,27)$  c) $A = (8,4)$ och $B = (27,54)$

**2.2.2** Enligt en formel kan en persons kroppsarea (mätt i kvadratmeter) uppskattas med

$$a = 0.007v^{17/40}h^{29/40},$$

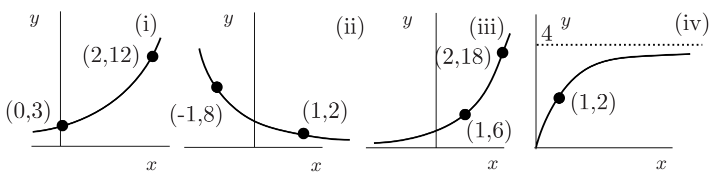
där $v$ är vikten i kilogram och $h$ är höjden i centimeter.

a) Vilken är i så fall kroppsarean av person som väger 64 kg och är 160 cm lång?

b) Vad väger en person som har kroppsarean $1,5$ m$^2$ och är 180 centimeter lång?

c) Lös ut $h$ som funktion av $a$ för personer med vikten 70 kg.

**2.2.3** Nedan illustreras fyra funktioners grafer. Samtliga funktioner har att göra med exponentialfunktioner. Ange en möjlig formel för var och en av dem.



**2.2.4** Vilka av följande funktioner är exponentiellt avtagande och vilka är exponentiellt växande?

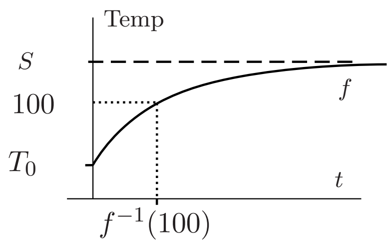
a) $f(t)=15e^{0,25t}$ b) $f(t)=2e^{-0,5t}$ c) $f(t)=7e^{0,2t}$ d) $f(t)=9e^{-\sqrt{2}t}$

## 2.3 Invers till funktioner

En stek placeras i en ugn som håller temperaturen $175°C$. Om $f(t)$ är stekens temperatur vid tiden $t$ efter att den sätts in ges funktionen av $f(t)=175-Ce^{-kt}$, enligt Newtons värmelag, för några positiva konstanter $C$ och $k$. Eftersom $Ce^{-kt}$ är exponentiellt avtagande närmar sig stekens temperatur 175 när $t\to\infty$

Om steken har temperaturen $T_0$ när den sätts in är $T_0=T(0)=175-C$, så $C=175-T_0$. Efter den preciseringen har vi alltså

$$f(t)=175-(175-T_0)e^{-kt}.$$



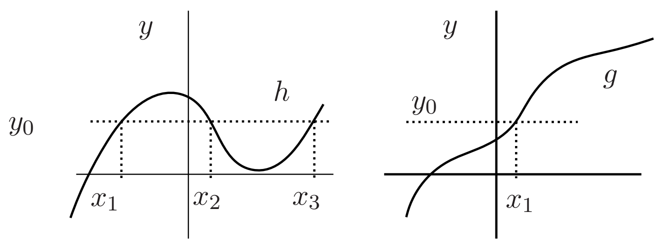

Grafen till $f$ illustreras i figuren

Vid varje tidpunkt kan vi beräkna stekens temperatur. Men vi skulle också kunna vända på steken och använd den som en klocka. Om vi öppnar ungen och avläser en väl placerad köttermometer kan vi faktiskt säga hur lång tid det gått sedan den stoppades in i ugnen. Tiden $t$ är en funktion av stekens temperatur $T$. Den funktionen kallas inversen till $f$ och betecknas $f^{-1}$. T ex är $f^{-1}(100)$ den tid det tar för steken att få temperaturen $100°C$. Lägg noga märke till att $f^{-1}(T)$ inte alls är $1/f(T)$!

För att hitta en formel $f^{-1}(T)$ är skulle vi behöva lösa ut $t$ ur likheten $T=175-(175-T_0)e^{-kt}$, där nu $T$ är given. Det klarar vi inte riktigt med de funktioner vi har nu, men principen är klar; ibland går det att vända om en funktion. Med hjälp av grafen kan vi avläsa vad $f^{-1}(T)$ är för en given temperatur $T$.

> En funktion $f$ är *inverterbar* om det för varje fix $y$ finns högst en lösning till ekvationen $f(x)=y$, där $x$ är den obekanta.

I figuren till höger har ekvationen $y_0=h(x)$ tre lösningar, men $y_0=g(x)$ bara en. Villkoret är samma som att säga att varje linje parallell med $x$-axeln skär grafen högst en gång. T ex är det därmed klart att




> alla strängt växande och strängt avtagande funktioner är inverterbara.

Samtidigt står det klar att t ex funktionen $g(x)=x^2$ inte är inverterbar, eftersom t ex ekvationen $1=f(x)=x^2$ har två lösningar $x=\pm1$.

För en inverterbar funktion $f$ kan man definiera dess *invers* $f^{-1}$ genom att låta $f^{-1}(y)$, för fixt $y$, vara lösningen till ekvationen $y=f(x)$, där $x$ är obekant. Om om ekvationen saknar lösning för något $y$, så betyder det att $y$ inte ingår i defintionsmängden till $f^{-1}$.

**Exempel.** Den linjära funktionen $f(x)=5x-4$ är strängt växande eftersom riktningskoefficienten är positiv. Den har alltså en invers $f^{-1}$ som vi nu beräknar en formel för.

$f^{-1}(y)$ är lösningen till ekvationen $y=5x-4$ där $x$ är den obekanta. Det ger $f^{-1}(y)=x=(y+4)/5$. Nu är det ju vanligast att man kallar variabeln i funktioner för $x$. Om man t ex vill rita grafen till $f$ och $f^{-1}$ i samma koordinatsystem, så måste de ha samma variabel. Men det är ju lätt ordat: det är bara att byta ut $y$ mot $x$ i formeln, så att $f^{-1}(x)=(x+4)/5$.

Man ska observera att det inte är någon skillnad mellan $f^{-1}(y)=x=(y+4)/5$ och $f^{-1}(x)=(x+4)/5$, de ger samma formel för funktionen $f^{-1}$. Båda säger att $f^{-1}$(reellt tal) är en femtedel av summan av det reella talet och fyra. □

**Exempel.** Funktionen $f(x) = x + 1/x$ är inte inverterbar. Vi ser det om vi försöker lösa ekvationen $y = x + 1/x$. Om vi multiplicerar båda sidor med $x$ får vi $yx = x^2 + 1$ som ger andragradaren $0 = x^2 - yx + 1$. Lösningarna till den är $x = y/2 \pm \sqrt{y^2/4 - 1}$. Vi ser att vi får *två* lösningar om t ex $y = 4$ nämligen $2 \pm \sqrt{3}$. □

**Exempel.** Funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ är strängt växande och definierad utom när $x$ är negativt. Den har en invers och $f^{-1}(y)$ är lösningen till $y = \sqrt{x}$, d v s $x = y^2$, men *bara om $y$ inte är negativt*. Det betyder att $f^{-1}(y) = y^2$, men att den bara är definierad när $y$ ligger i intervallet $[0, \infty)$. □

Vi har alltså att

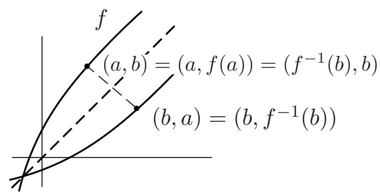
$$f^{-1}(y) = x, \quad \text{precis när} \quad y = f(x)$$

Om vi använder $f$ på den första likheten får vi $f(f^{-1}(y)) = f(x)$ som är $y$ enligt den andra. Om vi använder $f^{-1}$ på den andra likheten får vi $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x))$, där $f^{-1}(y) = x$ enligt den första. För en inverterbar funktion gäller

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \text{och} \quad f^{-1}(f(x)) = x,$$

så man kan säga att en funktion $f$ och dess invers $f^{-1}$ upphäver varandra. Återigen, observera att det inte är någon skillnad på att skriva $f(f^{-1}(y)) = y$ eller $f(f^{-1}(x)) = x$. Båda säger att om man tar $f^{-1}$ av ett reellt tal och sedan använder $f$ på resultatet så får man tillbaka det tal man startade med.

Antag nu att vi vill rita grafen till $f$ och $f^{-1}$ i samma koordinatsystem. För att rita grafen till $f$ ska vi pricka in alla punkter $(x, f(x))$ och för att rita grafen till $f^{-1}$ alla $(x, f^{-1}(x))$. Om vi kastar om ordningen på första och andra koordinaten betyder det att vi speglar grafen i linje $x = y$ i planet. För grafen till $f$ får vi då punkterna $(f(x), x) = (f(x), f^{-1}(f(x)))$ som faktiskt är en punkt på grafen till $f^{-1}$, eftersom andra koordinaten är $f^{-1}$ av den första.




Det betyder att

Grafen till $f^{-1}$ är spegelbilden till grafen av $f$ i linjen $x = y$.

### 2.3.1 Övningar

**2.3.1** Låt $f(t)$ vara vikten i kg hos en viss individ av en djurart, vid tiden $t$ mätt i år.

a) Är $f$ inverterbar?

b) Om du tänker dig att individen är under stadig utveckling i ett visst intervall av tiden $[0, 20]$. Vad betyder då $f(15)$ och $f^{-1}(15)$?

c) Om individen är du själv, är då $f$ inverterbar?

**2.3.2** Vilka av följande funktioner är inverterbara? Bestäm inversen om den finns. Använd $x$ som variabel i inversen.

a) $f(x) = x^3 - 2$ b) $g(x) = x^2 - 2$ c) $h(x) = -4x + 5$

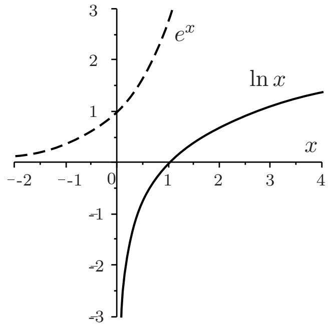
d) $k(x) = x^2 - 2x + 2$ med defintionsmängd $[1, \infty)$

## 2.4 Logaritmfunktioner

Eftersom exponentialfunktioner antingen är strängt växande eller strängt avtagande är de inverterbara.

Vi tittar närmare på $f(x) = e^x$. Inversen $f^{-1}$ till den kallas den *naturliga logaritmen* och betecknas normalt med ln. Vi har alltså att

$$\ln y = x \quad \text{precis när} \quad y = e^x$$




För att beräkna $\ln 5$ ska man alltså fundera på vad man ska välja $x$ till för att få $e^x = 5$. För att beräkna $\ln 1$ ska vi lösa $1 = e^x$, som har lösningen $x = 0$, så att $\ln 1 = 0$.

Grafen till $\ln(x)$ är spegelbilden till grafen av $e^x$ och därför är $\ln x$ en strängt växande funktion som är konkav. Vidare gäller att $\ln x$ bara är definierad för positiva $x$. Dessutom går $\ln x$ mot oändligheten när $x$ går mot oändligheten och mot negativa oändligheten när $x$ närmar sig 0.

Mycket viktiga räkneregler för logaritmer, där $a > 0$ och $b > 0$ (så att logaritmerna är definierade):

| | |
|---|---|
| $\ln 1 = 0$ | $\ln e = 1$ |
| $\ln ab = \ln a + \ln b,$ | $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b,$ |
| $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a,$ | $\ln(a^c) = c\ln a,$ |
| $e^{\ln a} = a$ | $\ln(e^a) = a,$ där $a$ är godtyckligt |

Speciellt ser vi att ln omvandlar en produkt till en summa och en kvot till en differens.

Alla räknereglerna följer från att $\ln x$ är ínversa funktionen till $e^x$ och räknereglerna för potenser.

T ex har vi $e^{\ln ab} = ab = e^{\ln a} e^{\ln b} = e^{\ln a + \ln b}$ vilket ger räkneregeln $\ln ab = \ln a + \ln b$.

**Exempel.** Förenkla $\ln(1/e^2)$

*Lösning.* Med räknereglerna få vi

$$\ln(1/e^2) \quad = \quad -\ln(e^2) = -2\ln e = -2$$

□

**Exempel.** Förenkla $3\ln 2 + 2\ln 3 - 4\ln\sqrt{6}$

*Lösning.* Med räknereglerna få vi

$$3\ln 2 + 2\ln 3 - 4\ln\sqrt{6} \quad = \quad \ln 2^3 + \ln 3^2 - \ln(\sqrt{6}^4) = \ln 8 + \ln 9 - \ln 36 = \ln(8 \cdot 9/36) = \ln 2$$

□

När vi införde exponentialfunktionen diskuterades problemet att bestämma den kontinuerliga tillväxttakten när det var givet att tillväxten efter en timme var $r$%. Vi kan nu lösa det. Vi vill bestämma $r_1$ så att $e^{r_1/100} = 1 + r/100$. Vi tar logaritmen av båda sidor och får

$$r_1/100 = \ln(1 + r/100), \quad \text{eller} \quad r_1 = 100\ln(1 + r/100)$$

Man kan visa att när $t$ är litet (nära 0) gäller att $\ln(1+t) \approx t$ så när $r$ är litet är $r_1 \approx 100 \cdot r/100 = r$, men i allmänhet är $r$ något större än $r_1$, något som banker utnyttjar i sin marknadsföring när de anger den kontinuerliga räntan, som omräknat till årlig ränta blir något högre.

**Exempel.** En bakteriekoloni växer i antal med den kontinuerliga tillväxttakten 3% per timme. Hur lång tid tar det innan bakterierna fördubblats?

*Lösning.* Låt oss säga att antalet bakterier är $N$ vid tiden $t = 0$. Deras antal vid tiden $t$ (i timmar) är då $Ne^{0,03t}$. Vi vill lösa $Ne^{0,03t} = 2N$, eller $e^{0,03t} = 2$. Vi tar logaritmen av båda sidor och får

$0,03t = \ln(2)$ eller $t = 100\ln(2)/3 \approx 23,104$. Så svaret är efter lite drygt 23 timmar. □

### 2.4.1 Andra logaritmer

Alla exponentialfunktioner $f(x) = a^x$ är stängt avtagande eller växande och därför inverterbara. Inversen till $f(x) = a^x$ brukar kallas $a$-logaritmen av $x$ och betecknas $\log_a x$.

Vi har att $a^{\log_a x} = x$, så man kan tänka på $\log_a x$ som det tal man ska upphöja $a$ till för att få just $x$.

$$\boxed{c = \log_a x \quad \text{betyder att} \quad a^c = x}$$

De räkneregler som gäller för den naturliga logaritmen gäller för alla logaritmfunktioner.

**Exempel.** Beräkna $\log_{10}(0,01)$ och $10^{-\log_{10} 5}$.

*Lösning.* Vi har $\log_{10}(0,01) = \log_{10}(10^{-2}) = -2\log_{10}(10) = -2$, för $\log_{10} 10 = 1$ eftersom $10^1 = 10$.
Vi har $10^{-\log_{10} 5} = 1/10^{\log_{10} 5} = 1/5$. □

**Exempel.** Förenkla $\log_{10} 50 - \log_{10} 0,5$.

*Lösning.* Vi har $\log_{10} 50 - \log_{10} 0,5 = \log_{10}(50/0,5) = \log_{10}(10^2) = 2$. □

Alla exponentialfunktioner kan skrivas med den naturliga exponentialfunktionen. Om $f(x) = ma^{kx}$ har vi

$$f(x) = ma^{kx} = me^{\ln a^{kx}} = me^{xk\ln a}.$$

Lika så kan alla logaritmfunktioner skrivas med hjälp av den naturliga logaritmen. Vi har att

$$x = a^{\log_a x} = (e^{\ln a})^{\log_a x} = e^{\ln a \log_a x},$$

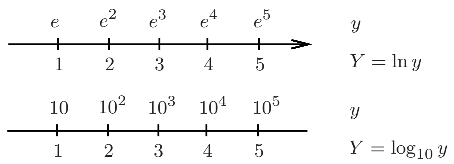
men eftersom $x = e^{\ln x}$ ger detta

$$\boxed{\ln x = \ln a \log_a x, \quad \text{eller} \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.}$$

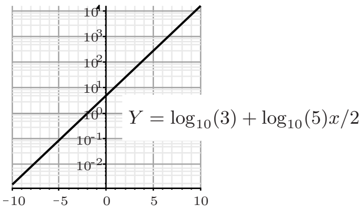
### 2.4.2 Logaritmisk skala

Att rita grafer till exponential- och potensfunktioner på papper blir ofta ganska svårt eftersom de växer eller avtar snabbt. Om man till exempel vill rita grafen till potensfunktionen $f(x) = x^3$ när $x$ ligger mellan 0 och 25 ska man ha en $y$-axel som går från 0 till 25 medan $x$-axeln bara behöver gå mellan 0 och 3.

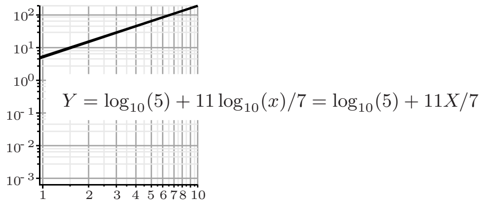
Logaritmer är ett utmärkt hjälpmedel för att rita grafer till sådana funktioner. Idén är att i stället för att markera t ex $y$-värden på vanligt sätt längs den lodräta axeln så markerar man logaritmen $Y = \ln y$ av av $y$-värden. Man använder då *logaritmisk* skala längs den lodräta axeln. Det är också vanligt att man använder 10-logaritmen $Y = \log_{10}(y)$ av $y$ i stället för den naturliga logaritmen. Skalan blir då mer lättläst eftersom vårt sätt att skriva tal använder basen 10.



Antag att vi vill rita grafen till $f(x) = 3 \cdot 5^{x/2}$ där vi använder 10-logaritmisk skala längs den lodräta axeln. Vi ska då i stället för att pricka in punkter $(x, f(x))$ pricka in $(x, \log_{10}(3e^{x/2}) = (x, \log_{10} 3 + x\log_{10}(5)/2)$. I praktiken betyder det att vi ritar grafen den linjen $Y = x\log_{10}(5)/2 + \log_{10} 3$ i koordinatsystemet.




Om man använder en logaritmisk skala längs bara en av axlarna brukar man säga att man använder *semi-logaritmiskt* koordinatsystem.




Antag att vi vill rita grafen till potensfunktionen $f(x) = 5 \cdot x^{11/7}$. Vi tar logaritmen $\log_{10}(f(x)) = \log_{10} 5 + 11\log_{10}(x)/7$. Om vi använder logaritmisk skala längs båda axlarna, $X = \log_{10}(x)$, $Y = \log_{10} y$ betyder det att vi ska rita den räta linjen $Y = \log_{10} 5 + 11X/7$.

Om man använder en logaritmisk skala längs båda axlarna brukar man säga att man använder *dubbel-logaritmiskt* koordinatsystem.

- Om man använder logaritmisk skala längs den lodräta axeln blir grafen till en exponentialfunktion en rät linje.
- Om man använder logaritmisk skala längs båda axlarna blir grafen till en potensfunktion en rät linje.

### 2.4.3 Övningar

**2.4.1** Förenkla

a) $\ln e^2$ b) $\ln\sqrt{e}$ c) $\ln(1/e)$ d) $\ln(1/e^2)$ e) $e^{\ln 7}$ f) $e^{-\ln 3}$

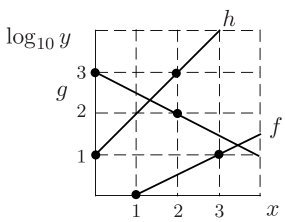
**2.4.2** Förenkla

a) $\log_{10} 1000$ b) $\log_{10} 0,01$ c) $10^{\log_{10} 4}$ d) $10^{\log_{10} 0,7}$ e) $10^{-\log_{10} 4}$ f) $10^{-\log_{10} 0,5}$

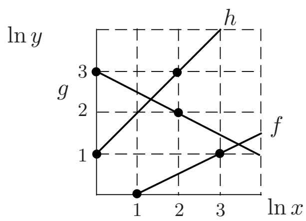
**2.4.3** Skriv om följande som logaritm av ett uttryck

a) $3\ln a$ b) $\ln a + 2\ln b$ c) $c\ln a - \ln b$ d) $c - 3\ln b$

**2.4.4** I figuren ser du grafen till tre funktioner $f$, $g$ och $h$ ritade semilogaritmiskt med 10-logaritmisk skala längs den lodräta axeln. Bestäm en formel för var och en av funktionerna




**2.4.5** I figuren ser du grafen till tre funktioner $f$, $g$ och $h$ ritade dubbellogaritmiskt med naturliga logaritmer. Bestäm en formel för var och en av funktionerna



## 2.5 Ekvationer med exponential- och logaritmfunktioner

### 2.5.1 Ekvationer med exponentialfunktioner

Vi ska här lösa några exempel på ekvationer som innehåller exponentialfunktioner.

**Exempel.** Lös ekvationen $5^x = 14$.

*Lösning.* Vi logaritmerar och får $\ln(5^x) = x\ln 5 = \ln 14$, så $x = \ln 14/\ln 5\ (= \log_5 14)$. □

**Exempel.** Utsläpp av klorfluorkarbonater (som används/användes i t ex luftkonditionering och hårspray) förstör ozonlagret i den övre atmosfären. Antag att ozon sönderfaller med den kontinuerliga takten av $0,25\%$ per år. Vilken är då den tid det tar för ozon att halveras (den så kallade halveringstiden).

*Lösning.* Antag att kvantiteten ozon är $Q$ vid tiden $t = 0$. Vi får veta att ozonet då vid tiden $t$ är $q(t) = Qe^{-0,0025t}$ och är intresserade av att bestämma $t$ så att $q(t) = Q/2$. Vi ska alltså lösa ekvationen $Qe^{-0,0025t} = Q/2$ eller

$$e^{-0,0025t} = 1/2.$$

Logaritmering ger $-0,0025t = -\ln 2$ och $t = 400\ln 2 (\approx 277,2589)$. Svaret är alltså ungefär 277 år. □

**Exempel.** Bestäm inversen till funktionen $f(t) = 50e^{0,4t}$.

*Lösning.* Vi har att $f^{-1}(s) = t$ om $s = f(t) = 50e^{0,4t}$, så vi ska lösa ut $t$ med hjälp av $s$ i ekvationen $s = 50e^{0,4t}$. Logaritmering ger $\ln s = \ln 50 + 0,4t$ och vi får $f^{-1}(s) = t = (\ln s - \ln 50)2,5 = 2,5\ln(s/50)$. Svaret är alltså (om vi använder $t$ som namn på variabeln i $f^{-1}$) att $f^{-1}(t) = 2,5\ln(s/50)$. □

**Exempel.** Lös ekvationen $2^x + 2^{x-1} = 6$.

*Lösning.* Vi observerar att $2^{x-1} = 2^x 2^{-1} = 2^x/2$. Högra ledet är därför $2^x + = 2^x/2 = (3/2)\cdot 2^x$. Vi ska alltså lösa $(3/2)2^x = 6$. Om vi multiplicerar båda sidor med $(2/3)$ får vi $2^x = 4 = 2^2$, så svaret är $x = 2$. □

Här är ett exempel där man kan göra en så kallad substitution och få en ekvation av grad två:

**Exempel.** Bestäm reella lösningar till ekvationen $e^{2x} - e^x - 2 = 0$.

*Lösning.* Vi observerar att $e^{2x} = (e^x)^2$, så om vi sätter $z = e^x$ blir ekvationen $z^2 - z - 2 = 0$, som är en hederlig andragradare med lösningar $z = 1/2 \pm \sqrt{1/4+2} = 1/2 \pm \sqrt{9/4} = 1/2 \pm 3/2$. Vi får alltså $z = 4/2 = 2$ och $z = -1$. Men det var inte $z$ utan $x$ vi ville ta reda på. Vi får två fall:

- $e^x = z = 2$. Vi logaritmerar och får $x = \ln(e^x) = \ln 2$
- $e^x = z = -1$. Ekvationen saknar lösning eftersom $e^x$ alltid är positivt.

Svaret är alltså $x = \ln 2$.

□

### 2.5.2 Ekvationer med logaritmer

**Exempel.** Lös ekvationen $\log_3(x^2) = 6$.

*Lösning.* Vi expontentierar båda sidor genom att upphöja 3 i dem och får då

$$x^2 = 3^{\log_3 x^2} = 3^6,$$

så $x = \pm 3^3 = \pm 27$.

En liten varning är på sin plats här. Det är kanske frestande att skriva om $\log_3(x^2)$ som $2\log_3 x$, men observera att dessa bara är lika om $x > 0$ och att man i så fall tappar bort lösningen $x = -27$. □

**Exempel.** Bestäm inversen till funktionen $f(t) = 2 - 3\ln x$.

Vi har att $f^{-1}(y) = x$ om $y = f(x) = 2 - 3\ln x$, så vi vill lösa ut $x$ ur ekvationen $y = 2 - 3\ln x$, eller $\ln x = (2-y)/3$. Vi exponentierar och får $x = e^{\ln x} = e^{(2-y)/3}$. Det betyder att $f^{-1}(y) = e^{(2-y)/3}$, eller om vi använder $x$ som namn på variabeln

$$f^{-1}(x) = e^{(2-x)/3}.$$

□

**Exempel.** Lös ekvationen $2\ln(x-1)+\ln(x+1) = 3\ln x$.

*Lösning.* Vi observerar att för att logaritmerna ska vara definierade måste i tur och ordning $x > 1$, $x > -1$ och $x > 0$. Alla lösningar måste alltså vara $> 1$.

Vi exponentierar och får

$$(x-1)^2(x+1) = e^{2\ln(x-1)+\ln(x+1)} = e^{3\ln x} = x^3.$$

Vi ordnar 0 i ena ledet och utvecklar:

$$0 = x^3-(x-1)^2(x+1) = x^3-(x^2-2x+1)(x+1)-x^3 = x^3-(x^3-x^2-x+1) = x^2+x-1.$$

Andragradaren har de två lösningarna $x = -1/2 \pm \sqrt{1/4+1} = (\pm\sqrt{5}-1)/2$. Av dessa är det ingen som är $> 1$, så ekvationen *saknar lösning*. □

### 2.5.3 Övningar

**2.5.1** Lös följande ekvationer

a) $2^x = 3$ b) $3^{-2x} = e$ c) $\ln(x-1)+\ln(x+1) = 2$

d) $\ln(x-2)-\ln(x+1) = \ln 2$ e) $2\ln(x)-\ln(x+1) = -\ln 2$

**2.5.2** I början på 60-talet skedde utsläpp av radioaktivt strontium på grund av kärnvapenprovsprängningar. Det togs upp i människors skelett. Om halveringstiden för strontium-90 är 29 år, hur stor andel av det som upptogs 1960 fanns då kvar i en person år 2000? (Använd en exponentialfunktion av typen $a2^{kx}$.)

**2.5.3** Lös ekvationen $e^{2x} = e^x+6$

**2.5.4** En stek med temperaturen 20° C, sätts in i en ugn som håller den konstanta temperaturen 175° C. Stekens temperatur är då $175-(175-20)e^{-kt}$ vid tiden $t$, för någon konstant $k$. Efter 20 minuter har steken temperaturen 30° C. Den är klar när temperaturen är 70° C. När är steken klar?

**2.5.5** En bakteriekoloni fördubblas i antal på 5 timmar. Hur lång tid tar det innan den tredubblats?

**2.5.6** Du tar hostdämpande hydrokondon bitartrat. Vid $t$ timmar efter intag återstår $10(0,82)^t$ mg av preparatet i kroppen.

a) Hur mycket tog du av preparatet?

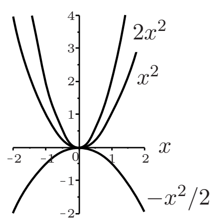
b) Hur många procent finns kvar i din kropp efter en timme?

c) Hur mycket finns kvar 6 timmar efter intag?

d) Hur länge dröjer det innan bara 1 mg finns kvar i kroppen?

## 2.6 Nya funktioner från gamla

### 2.6.1 Förskjutningar och töjningar



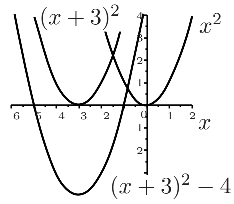

Om $f$ är en funktion och $c$ en konstant kan vi få en ny funktion $g$ genom att sätta $g(x) = cf(x)$. Grafen till $g$ är lätt att få från grafen till $f$ : varje värde till $f$ är mulplicerat med $c$. Grafen till $g$ är då en töjning med faktorn $c$ i lodrät led om $c > 0$. Om $c < 0$ ska dessutom grafen speglas i den vågräta axeln.

Om $0 < c < 1$ krymper töjningen grafen och om $c > 1$ dras grafen ut.

Om $f$ är en funktion och $c$ en konstant kan vi också få en ny funktion $g$ genom att sätta $g(x) = f(x+c)$. Igen är det lätt att förstå hur grafen till $g$ ser ut utgående från grafen till $f$ : vi ser att $g$ i $x$ har samma värde som $f$ har i $x+c$. Om $c > 0$ betyder det att vi får grafen till $g$ genom att förskjuta grafen till $f$ vågrätt åt vänster med $c$ enheter. Är i stället $c < 0$ ska förskjutningen göras åt höger.

Vi kan också få funktionen $f(x)+c$ vars graf fås från grafen till $f$ genom förskjutning lodrätt uppåt om $c > 0$ och nedåt om $c < 0$.

**Exempel.** Skissa grafen till $f(x) = x^2 + 6x + 5$.

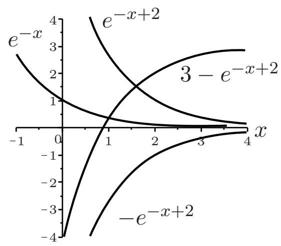



*Lösning.* Vi kvadratkompletterar och får $f(x) = (x+3)^2 - 4$. Vi får grafen till $(x+3)^2$ genom att förskjuta den välbekanta grafen till $x^2$ åt vänster med 3 enheter. Grafen till $f$ får vi sedan genom att förskjuta resultatet $-4$ enheter nedåt.

□

Grafen till alla polynomfunktioner av grad 2 kan fås på liknande vis från grafen till $x^2$.

**Exempel.** Skissa grafen till $f(x) = 3 - e^{2-x}$.




*Lösning.* Grafen till $e^{-x}$ är välbekant. Grafen till $e^{2-x} = e^{-(x-2)}$ fås från den genom förskjutning åt höger 2 enheter. Grafen till $-e^{2-x}$ får vi genom att spegla resultatet i den vågräta axeln. För att sedan få grafen till $f(x)$ förskjuter vi resultatet av det 3 enheter uppåt.

□

### 2.6.2 Sammansättningar

**Exempel.** Ett fartyg har gjort ett olje utstäpp i stilla väder. Vi utgår från att det ger en cirkulär fläck på havsytan. Arean av den är en funktion av fläckens radie $r : A = \pi r^2$. Men radien ändras med tiden så att den är en funktion av tiden, låt oss säga att $r(t) = 200(t^2/(1+t^2)$ med enheten meter. Det betyder i sin tur att oljefäckens area är en funktion av tiden och att $A(r(t)) = \pi r(t)^2 = 40000\pi(t^2/1+t^2)^2$. □

Givet två funktioner $f(x)$ och $g(x)$ kan man bilda nya funktioner genom att ta deras *sammanstättningar*: $f(g(x))$ och $g(f(x))$.

**Exempel.** Låt $f(x) = x^2$ och $g(x) = e^x + 1$. Då är

$$f(g(x)) = g(x)^2 = (e^x+1)^2 = e^{2x} + 2e^x + 1$$
$$g(f(x)) = e^{f(x)} + 1 = e^{x^2} + 1,$$

*som är två helt olika funktioner.* □

**Exempel.** Skriv funktionerna $h(t) = (1+t^3)^{27}$ och $k(x) = -e^{2x}$ som sammansättningar.

*Lösning.* Det finns inte bara ett sätt att göra detta på, men vi ska åstadkomma exempel på hur det ska göras.

Om vi sätter $f(t) = t^{27}$ och $g(t) = 1+t^3$ så har vi att $h(t) = f(g(t))$.

Om vi sätter $f(x) = 2x$ och $g(x) = -e^x$, så har vi att $g(f(x)) = k(x)$. □

Till skillnad från töjningar och förskjutningar finns det inget lätt sätt att visualisera grafen till $f(g(x))$ om grafen till $f$ och $g$ är kända.

### 2.6.3 Övningar

**2.6.1** Förenkla följande om $f(x) = x^2 + 1$

a) $f(t+1)$ b) $f(t^2+3)$ c) $(f(t))^2+3$

**2.6.2** Förenkla följande om $f(x) = 3x^2 + 1$ och $g(x) = x^2$

a) $f(g(x))$ b) $g(f(x))$

**2.6.3** Skissa graferna till följande funktioner

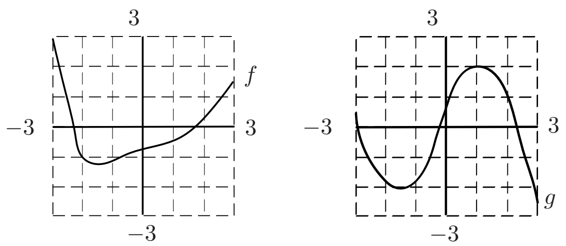
a) $x^2+3x-4$ b) $3-4x-x^2$ c) $e^{x-3}$

d) $e^{1-x}+3$ e) $\ln(x+3)+3$ f) $\ln(1/(x+3)^2)-1$

**2.6.4** Skriv $2\ln(x-1)-\ln(x+1)$ som en sammansättning av en logaritm och en rationell funktion.

**2.6.5** Figuren nedan illustrerar graferna till två funktioner. Använd dem för att uppskatta

a) $f(g(1))$ b) $g(f(1))$ c) $f(g(2))$ d) $g(f(2))$

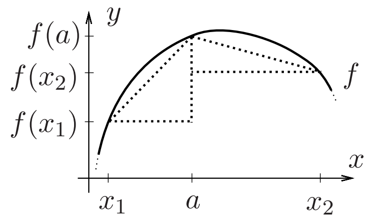


# 3 Derivator

## 3.1 Derivatan som förändringstakt

**Exempel.** En hungrig student har slagit på stort och köpt en stek för att smörja kråset en helg. Steken sätts in i ugnen med en välplacerad stektermometer. Aromen får det att vattnas i munnen. Under de första tio minuterna stiger temperaturen raskt och studenten, som hoppas på snar förtäring, löser ett sudoku för att skingra tankarna. När det är klart avläses termometern igen. Men nu visar sig temperaturen stiga i en besvärande långsam takt. □

I exemplet finns det en funktion $f$ i bakgrunden: $f(x)$ temperaturen som stektermometern visar vid tidpunkten $x$. Det handlar om att värdet på funktionen $f$ förändras i olika takt vid olika värden på variabeln $x$.




Figur 4: Olika differenskvoter när $x = x_1$ respektive $x = x_2$.

För att mäta i vilken *takt* funktionens värden förändras i närheten av ett specifikt värde $x = a$ på variabeln ska vi ta reda på förändringen i funktionens värden i förhållande till förändringen i variabeln. Låt oss välja ett värde på variabeln $x$ i närheten av $a$ ($x \neq a$). Ett mått på förändringstakten i $a$ ges då av den så kallade *differenskvoten*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

d v s förändringen i funktionsvärden mellan $x$ och $a$ i förhållande till förändringen mellan $x$ och $a$, variabelns förändring. Det är i detta sammanhang brukligt att man inför beteckningen $\Delta f$ som förkortat skrivsätt för förändringen i funktionsvärde $f(x) - f(a)$ och $\Delta x$ för förändringen i variabelns värde $x - a$, så att differenskvoten kan skrivas

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \qquad \left(= \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right),$$

men detta beteckningssätt gör talet $a$ osynligt, trots att det i själva verket är viktigt.

Vid närmare eftertanke står det klart att detta inte fungerar som mått på funktionens förändringstakt i $a$. För det första sägs ju inget om hur nära $x$ ska ligga $a$, för det andra beror ju differenskvoten inte bara på $a$ utan också på vad $x$ är: olika $x$ i närheten av $a$ kan ge olika differenskvoter.

Det som återstår att göra för att få något som bara beror på $a$ är att låta $x$ närma sig $a$, d v s ta gränsvärdet av differenskvoten ovan när $x$ går mot $a$.

Nu uppstår emellertid ett nytt problem: om man i differenskvoten ersätter $x$ med $a$, får man ett uttryck av typen "0/0". Sådana uttryck kan vara vad som helst; ibland kan man ge dem mening, men långt i från alltid. Det precisa sättet att säga detta är att man inte kan vara säker på att differenskvoten har något gränsvärde när $x$ går mot $a$. Följande definition är därför på sin plats:

**Definition** Vi utgår från att funktionen $f$ är definierad för alla värden på variabeln $x$ i närheten av talet $a$. Funktionen sägs då vara *deriverbar* i $a$ om differenskvoten

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

*har ett gränsvärde* när $x$ går mot $a$. Detta gränsvärde betecknas i så fall med $f'(a)$ och kallas funktionens *derivata* i $a$. Man har alltså i detta fall

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Inspirerat av beteckningssättet $\Delta f / \Delta x$ för differenskvoten används också beteckningen

$$\frac{df}{dx}(a)$$

för $f'(a)$. Här ska man lägga märke till att $df/dx$ *inte* är en kvot mellan två tal, utan en sammanhållen beteckning för $f'$.

**Exempel.** Antag att funktionen $f$ är linjär, d v s $f(x) = kx + m$, där $k$ och $m$ är några givna konstanter. Låt $a$ vara ett fixt tal. Differenskvoten blir då

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{kx + m - (ka + m)}{x - a} = \frac{k(x - a)}{x - a} = k.$$

Vi ser att differenskvoten är en konstant; den beror inte alls på $x$. När $x$ går mot $a$, blir förstås gränsvärdet av denna kvot också $k$. Vi har kommit fram till att $f$ är deriverbar i $a$, för gränsvärdet finns, och att detta gränsvärde är $k$. Alltså har vi i detta exempel att $f'(a) = k$.

Det betyder att funktionen alltid har samma momentana förändringstakt, för $f'(a)$ har samma värde oavsett vad $a$ är. Om vi tänker på att grafen till en linjär funktion är en rät linje, är detta något som inte bör överraska. Linjära funktioner karakteriseras just av att de har samma konstanta derivata i alla tal $a$ i definitionsmängden.

Lägg märke till att grafen till $f$ är en rät linje med riktningskoefficient $k$. □

Exemplet visar att om funktionen $f$ själv är konstant, d v s har samma värde, låt oss kalla det $m$, för alla $x$, så att $f(x) = m$, så har $f$ derivatan 0 i alla tal: $f'(a) = 0$ för alla tal $a$. Detta brukar något slarvigt sägas "derivatan av en konstant är noll".

**Exempel.** Vi låter nu $f(x) = x^2$ och undersöker om $f$ har en derivata i ett tal $a$ och vad derivatan i så fall kan vara.

*Lösning.* Differenskvoten blir nu

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = x + a,$$

med hjälp av konjugatregeln. Här ser vi att kvoten faktiskt beror på $x$, men vi förstår också att gränsvärdet av den då $x$ går mot $a$ blir $a + a = 2a$. Vi har kommit fram till att $f$ är deriverbar i varje tal $a$ och att $f'(a) = 2a$. T ex har vi när $a = 10$ att $f'(10) = 20$, men när $a = -3$ har vi att $f'(-3) = -6$. Funktionen har olika momentan förändringstakt i olika tal i definitionsmängden. □

Det är inte ovanligt att man skriver det $x$ vi använt ovan som $a + h$ där $h$ är ett tal nära 0. Vi vill ju att $x$ ska vara nära $a$ så då kan vi lika gärna sätta $x = a + h$, där $h$ ligger nära 0 (antingen lite till vänster eller till höger om 0 på tallinjen). Differenskvoten i $a$ blir då

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{1}{h}(f(a+h) - f(a)),$$

där vi nu i högerledet ska låta $h$ närma sig 0, för att få $x$ att närma sig $a$.

Sammanfattningsvis har vi att om $f$ är deriverbar i $a$ så ges derivatan i $a$ av

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.}$$

Eftersom derivatan kan variera i olika tal $a$ i funktionen $f$:s definitionsmängd är det inte så konstigt att vi vill tänka på också derivatan som en funktion. Om vi startar med att kalla $f$:s variabel för $x$ är det då mest naturligt att också kalla variabeln i derivatan för $x$, och inte för $a$ som vi gjort ovan. Då lämpar sig inte den första varianten av differenskvot vi använde särskilt bra eftersom $x$ då skulle användas i två olika betydelser. Den andra varianten duger då betydligt bättre:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.}$$

Om $f$ betecknar den ursprungliga funktionen, så betecknas den nya funktion vi får genom att derivera i olika tal i definitionsmängden för $f'$ eller $Df$ eller $df/dx$. Den nya funktionen $f'$ kallas då *derivatan* till $f$ och är, till skillnad från $f'(a)$, alltså inte ett tal, utan en ny funktion.

**Varning!** Det är viktigt att ha koll på prioritetsordningen mellan $'$ och $a$ i beteckningen $f'(a)$. Man kan frestas att tro att man först kan sätta in värdet $a$ i funktionen och sedan derivera. Gör man det får man 0 både som svar och som poäng på ett prov! Talet $f(a)$ är ju en konstant och deriverar man en konstant får man 0. Man ska först derivera funktionen och sedan sätta in ett specifikt värde på $a$.

**Exempel.** Bestäm $f'(x)$ när $f(x) = x^3$.

*Lösning.* Vi ska bestämma gränsvärdet, när $h$ går mot 0, av differenskvoten

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}(f(x+h)-f(x)) &= \frac{1}{h}((x+h)^3-x^3) = \\
&= \frac{1}{h}(x+h-x)((x+h)^2+(x+h)x+x^2) = \\
&= (x+h)^2+(x+h)x+x^2,
\end{aligned}$$

där vi använt att $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ (Kontrollräkna!). Det är ingen större konst att se att gränsvärdet då blir $x^2+x\cdot x+x^2=3x^2$, när $h$ går mot 0. Vi har alltså kommit fram till att $f'(x)=3x^2$, eller med annat beteckningssätt

$$D(x^3)=(x^3)'=3x^2.$$

□

På liknande sätt som i exemplet strax ovan kan man visa att

$$\boxed{D(x^n)=nx^{n-1} \quad \text{när} \quad n \quad \text{är ett positivt heltal}}$$

**Exempel.** Hur gick det nu för den hungrige studenten? Newton formulerade en berömd värmelag. Den säger att den takt med vilken temperaturen hos ett föremål (steken) i en varmare omgivning ändras vid en viss tidpunkt, är proportionell mot skillnaden mellan omgivningens temperatur och föremålets för tillfället (*Newtons värmelag*).

Om vi låter $t$ beteckna tiden och skriver $f(t)$ för stekens temperatur och utgår från att ugnens temperatur är konstant $175^\circ$ betyder det att

$$f'(t)=k(175-f(t))$$

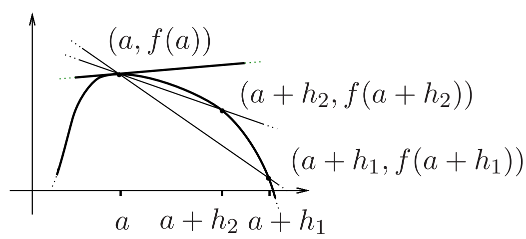
för någon konstant $k$. En sådan ekvation kallas en modell för situationen och begränsar starkt vad funktionen $f$ kan vara. I detta fall är modellen vad som kallas en differentialekvation. Genom att lösa den kan studenten ta reda på hur lång till det tar innan $f(t)$ blir 73 och steken är redo för förtäring. □

## 3.2 Derivatan som lutning

Ett populärt sätt att tänka på derivatan $f'(a)$, är att uppfatta den som lutningen till grafen av $f$ i punkten $(a,f(a))$.

Vi fixerar $(a,f(a))$ på grafen till $f$. Vi väljer ett värde $a+h$ på variabeln $x$, där $h$ ligger nära 0, och får nu också punkten $(a+h,f(a+h))$ på grafen.

Linjen genom de två punkterna har en ekvation vars riktningskoefficient vi kan bestämma till




Figur 5: Tangent och sekanter genom $(a,f(a))$.

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

En sådan sekant till grafen har alltså ekvationen

$$y=\frac{1}{h}(f(a+h)-f(a))(x-a)+f(a),$$

för vi ser att om vi sätter $x=a$ i höger led så blir $y=f(a)$, så att sekanten går genom punkten $(a,f(a))$.

Vi känner igen differenskvoten som riktningskoefficienten. När vi låter $h$ går mot noll kommer denna linje därför att närma sig linjen med ekvation

$$y=f'(a)(x-a)+f(a),$$

som är ekvationen för *tangenten* till grafen i punkten $(a,f(a))$.

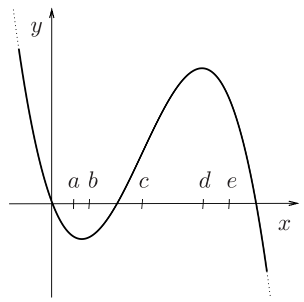
Om funktionen $f$ har derivatan $f'(a)$ så kallas linjen med ekvation

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

för *tangenten* till grafen i punkten $(a, f(a))$. Den har riktningskoefficient $f'(a)$.

**Exempel.**
I figuren ser du grafen till en funktion och fem markerade punkter på $x$-axeln. Man har beräknat $f'(x)$ i var och en av dessa men glömt bort vilken punkt som hör till vilket värde. Rekonstruera följande tabell:

| $x$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | 0 | 0,5 | 2 | -0,5 | -2 |




*Lösning.*
Det är bara i punkten med $d$ som första koordinat som tangenten är parallell med $x$-axeln, d v s har riktningskoefficient 0, så $f'(d) = 0$.

Vi ser att tangenten i punkterna med första koordinat $a$ och $e$ har negativ lutning och att den med $e$ har minst lutning (=störst lutning nedåt). Det ger $f'(e) = -2$ och $f'(a) = -0,5$.

I punkterna med första koordinat $b$ och $c$ är tangentens lutning positiv. Den är störst i den med första koordinat $c$. Det ger $f(c) = 2$ och $f(b) = 0,5$. Tabellen var alltså

| $x$ | $d$ | $b$ | $c$ | $a$ | $e$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | 0 | 0,5 | 2 | -0,5 | -2 |

$\square$

**Exempel.** Bestäm en ekvation för tangenten till grafen till funktionen $f(x) = x^3$ i den punkt på grafen där första koordinaten är 2.

*Lösning.* Den punkt på grafen det är fråga om är $(2, f(2)) = (2, 8)$. En ekvation för tangenten ges av

$$y = f'(2)(x-2) + f(2) = f'(2)(x-2) + 8.$$

Vi behöver bestämma $f'(x)$, för att kunna räkna ut $f'(2)$. Vi har att $f'(x) = D(x^3) = 3x^2$, så $f'(2) = 3 \cdot 4 = 12$. Detta ger oss att tangenten har ekvationen

$$y = 12(x-2) + 8 = 12x - 16.$$

$\square$

## 3.3 Genvägar till derivator

- $Dx^a = ax^{a-1}$, där $a$ är en konstant. Om $a < 1$ måste $x \neq 0$.
- $De^x = e^x$
- $D\ln x = \dfrac{1}{x}$

Tabell 1: Några grundläggande funktionernas derivator.

Hittills har vi med handkraft, utgående från derivatans definition som gränsvärde av en differenskvot, endast lyckats beräkna ett fåtal derivator. Detta är naturligtvis inte hållbart i längden att behöva beräkna nya gränsvärden varje gång vi ska derivera. Vi behöver en tabell över kända derivator och ett antal allmänna regler för derivering. för derivering.

Genom att genomföra kalkyler enligt derivatans definition kan man med viss möda bevisa riktigheten av derivatorna i tabell 1. Dessa bör du kunna utantill.

**Exempel.**

a) Om vi använder formeln för $x^a$ med $a = 1/2$, får vi

$$D(\sqrt{x}) = D(x^{1/2}) = \frac{1}{2} \cdot x^{1/2-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Derivering av "rottecken" är så vanligt förekommande att du bör kunna

$$\boxed{D(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

utantill.

b) Samma formel men nu med $a = -1$ ger

$$D\Big(\frac{1}{x}\Big) = D(x^{-1}) = (-1) \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

c) Med $a = -n$ får vi

$$D\Big(\frac{1}{x^n}\Big) = D(x^{-n}) = (-n)x^{-n-1} = \frac{-n}{x^{n+1}}.$$

□

### 3.3.1 Allmänna deriveringsregler

De grundläggande funktionerna räcker inte till för att beskriva de intrikata förlopp som dyker upp i verkligheten. I matematik används därför de grundläggande funktionerna som byggstenar för att åstadkomma mer komplicerade funktioner. Vi bygger nya funktioner genom att addera, multiplicera, göra sammansättningar och ta kvoter av gamla. I denna process är det viktigt att kunna uttrycka de nya funktionernas derivator med hjälp av de gamlas. För den sakens skull har matematiker tänkt igenom vad som händer i detta avseende. Man har kommit fram till följande

Allmänna deriveringsregler

1. $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$
2. $(f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x)$
3. $(cf(x))' = cf'(x)$, när $c$ är en konstant.
4. $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)g'(x)$ (Produktregeln.)
5. $\Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big)' = \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$ (Kvotregeln.)
6. $(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$ (Kedjeregeln; $g'(x)$ kallas i detta sammanhang för den inre derivatan.)

**Exempel.** Tabellen över de grundläggande funktionernas derivator och produktregeln ger

$$D(e^x \cdot \ln x) = e^x \cdot \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x} = e^x(x\ln x+1)/x.$$

□

Nästa exempel visar hur man deriverar andra exponentialfunktioner än $e^x$ med hjälp av en enkel *omskrivning*. Generellt kan det vara bra att vid derivering först fundera en stund om man kan förenkla räkningarna genom att göra en omskrivning. De följande exemplen illustrerar detta.

**Exempel.** För att derivera $5^x$ görs omskrivningen $5^x = e^{x\ln 5}$. Den kan då ses som $f(g(x))$ där $f(x) = e^x$ och $g(x) = x\ln 5$. Eftersom $D(e^x) = e^x$ ger nu kedjeregeln att

$$D(5^x) = \; = \; D(e^{x\ln 5}) = e^{x\ln 5} D(x\ln 5) = 5^x \cdot \ln 5.$$

Funktionen $x^5$ har derivata $D(x^5) = 5x^4$. Förväxla inte potensfunktionen $x^a$ med exponentialfunktionen $a^x$! $\square$

**Exempel.** För ett exempel på en rationell funktion har vi

$$\begin{aligned} D\Big(\frac{2x+1}{x^4+3}\Big) &= \frac{D(2x+1)(x^4+3) - (2x+1)\cdot D(x^4+3)}{(x^4+3)^2} = \\ &= \frac{2\cdot(x^4+3) - (2x+1)\cdot 4x^3}{(x^4+3)^2} = \frac{6-4x^3-6x^4}{(x^4+3)^2}, \end{aligned}$$

där vi utnyttjade kvotregeln och derivatan av en potens. $\square$

**Exempel.** Beräkna $f'(3)$ om $f(x) = \ln(5x^2)$.

*Lösning.* Vi kan, om vi vill, först skriva om uttrycket för $f(x)$ med hjälp av logaritmlagarna. Vi har

$$f(x) = \ln(5x^2) = \ln 5 + \ln x^2 = \ln 5 + 2\ln x,$$

och alltså är $f'(x) = 0 + 2\cdot\dfrac{1}{x} = 2/x$. Omskrivningen $\ln x^2 = 2\ln x$ är bara giltig när $x > 0$, men det stör oss inte eftersom vi söker derivatan i $x = 3$. Vi får $f'(3) = 2/3$. $\square$

**Exempel.** Beräkna $f'(-1)$ om $f(x) = \ln(5x^2)$.

*Lösning.* Den här gången gör vi omskrivningen så här:

$$f(x) = \ln(5x^2) = \ln 5 + \ln x^2 = \ln 5 + \ln(-x)^2 = \ln 5 + 2\ln(-x),$$

och alltså är $f'(x) = 0 + 2\cdot\dfrac{-1}{-x} = 2/x$. Omskrivningen $\ln(-x)^2 = 2\ln(-x)$ är giltig eftersom $x < 0$. Vi får $f'(-1) = -2$. $\square$

**Exempel.** Bestäm $f'(1)$ om $f(x) = \sqrt{(\sqrt{x}\cdot\ln x)^4}$.

*Lösning.* Vi bestämmer $f'(1)$ genom att först beräkna $f'(x)$. Innan vi gör det, gör vi rotutdragning som ger omskrivningen

$$f(x) = x(\ln x)^2,$$

som är giltig eftersom $f$ bara är definierad för $x > 0$. Enligt produktregeln och kedjeregeln har $f$ derivatan

$$f'(x) \; = \; 1\cdot(\ln x)^2 + x\cdot 2\ln x\cdot D(\ln x) = (\ln x)^2 + 2x\cdot\ln x\cdot(1/x) = (\ln x)^2 + 2\ln x.$$

$\square$

### 3.3.2 Sammansatta funktioner. Kedjeregeln.

Av de allmänna regler för derivering som togs upp i förra avsnittet är det kedjeregeln som bruka ställa till mest bekymmer för den som är ovan.

För derivatan av en sammansatt funktion gäller alltså:

> Om $y = h(z)$, där $z = g(x)$, d v s $y = h(g(x))$, så är
>
> $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}, \quad \text{d v s} \quad \frac{d}{dx}[h(g(x))] = h'(g(x))\cdot g'(x).$$
>
> under förutsättning att derivatorna i högerledet finns.

I detta sammanhang kallas, som tidigare påpekats, $\dfrac{dz}{dx} = g'(x)$ för den *inre derivatan* av $h(g(x))$.

Kedjeregeln är en mycket viktig räkneregel och används väldigt ofta i derivator. Vi presenterar därför en samling exempel på hur den används.

**Exempel.** En exponentialfunktion $f(x) = e^{bx}$, där $b$ är en konstant, kan ses som en sammansättning av exponentialfunktionen med $(x) = bx$. Man behöver alltså inte ta med $e^{bx}$ bland de elementära funktionerna, utan det räcker med ett kunna derivatan av den elementära funktionen $De^x = e^x$ och kedjeregeln får att inse att $De^{bx} = be^{bx}$. $\square$

**Exempel.** Beräkna derivatan av $y = f(x) = \sqrt{x^2+x-8}$.

*Lösning.* Vi kan skriva $y = \sqrt{z}$ med $z = x^2+x-8$ och använda kedjeregeln.

Vi har

$$\frac{dy}{dz} = \frac{d(\sqrt{z})}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{z}} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+x-8}} \qquad \text{och} \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2+x-8) = 2x+1.$$

Alltså är

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+x-8}}\cdot(2x+1) = \frac{2x+1}{2\cdot\sqrt{x^2+x-8}}.$$

På samma sätt visas allmänt med kedjeregeln att

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{z}) = \frac{d(\sqrt{z})}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{z}}\cdot\frac{dz}{dx},$$

d v s att

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\sqrt{g(x)}) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}.}$$

$\square$

**Exempel.** a) $\dfrac{d}{dx}(\sqrt{1-x}) = \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}$, b) $\dfrac{d}{dx}(\sqrt{e^x+1}) = \dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}}$. $\square$

**Exempel.** Beräkna derivatan av $y = f(x) = \ln g(x)$, då $g(x)$ är en funktion av $x$ och $g(x) > 0$.

*Lösning.* Med $y = \ln z$ och $z = g(x)$ fås enligt kedjeregeln

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = \frac{d(\ln z)}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = \frac{1}{z}\cdot\frac{dz}{dx} = \frac{1}{g(x)}\cdot g'(x).$$

Alltså

$$\boxed{\frac{d}{dx}\ln g(x) = \frac{g'(x)}{g(x)},}$$

som är en mycket användbar formel! $\square$

Formeln $\dfrac{d}{dx}(\ln x) = \dfrac{1}{x}$ är förstås oberoende av vilket namn man ger variabeln. T ex gäller att $\dfrac{d}{dt}(\ln t) = \dfrac{1}{t}$, $\dfrac{d}{du}(\ln u) = \dfrac{1}{u}$, $\dfrac{d}{dz}(\ln z) = \dfrac{1}{z}$, $\dfrac{d}{dö}(\ln ö) = \dfrac{1}{ö}$, o s v deriveringsregeln gäller oberoende av de bokstäver som används, och $x$, $t$, $u$, $z$, ö, används här som fria variabler. Däremot är $\dfrac{d}{dx}(\ln z)$ *ej* lika med $\dfrac{1}{z}$, utan $\dfrac{d}{dx}(\ln z) = \dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{dz}{dx}$ enligt kedjeregeln (här har vi skrivit $z$ för funktionen $z(x)$, som alltså varierar med $x$ .

**Exempel.** För alla $x$ sådana att funktionen som deriveras är definierad gäller:

a) $\dfrac{d}{dx}[\ln(x^2+x+4)] = \dfrac{2x+1}{x^2+x+4}$,

b) $\dfrac{d}{dx}[\ln(5x^2)] = \dfrac{5\cdot 2x}{5\cdot x^2} = 2/x,.$

$\square$

**Exempel.** Funktionen $f(x) = \ln(-x)$ är definierad för $-x > 0$, d v s $x < 0$. Enligt formeln ovan med $g(x) = -x$ blir derivatan

$$D(\ln(-x) = f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x},$$

när $x < 0$. $\square$

Det betyder att $\ln x$ och $\ln(-x)$ har samma derivata. Skillnaden är att den första funktionen bara är definierad för positiva värden på $x$, medan den andra bara är definierad för negativa.

För att göra det bekvämt för sig är det därför lämpligt att använda funktionen $|x|$ som till $x$ ordnar talet $x$ om $x \geq 0$, och $x$ med ändrat tecken om $x$ är negativt. Det betyder att $|-3| = 3(= -(-3))$, medan $|5| = 5$. Funktionen kallas *absolutbeloppet av x* och har alltså som enda effekt att den gör om negativa tal till positiva av "samma storlek". Observera att $|x|$ aldrig är negativt! Ekvationen $|x| = 6$ har två lösningar: $x = \pm 6$.

Eftersom $-x = |x|$ för negativa $x$ kan nu de båda derivatorna sammanfattas med

$$\boxed{\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x} \quad \text{för alla } x \neq 0.}$$

Allmännare ger nu en ny användning av kedjeregeln att

$$\boxed{\frac{d}{dx}\ln|g(x)| = \frac{g'(x)}{g(x)}},$$

som alltså gäller när $g(x) \neq 0$.

**Exempel.** Derivera $f(x) = \ln\left|\frac{2x+3}{x^2-1}\right|$.

*Lösning.* Skriv först om $f(x)$ med hjälp av logaritmlagarna! Man får

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln|2x+3| - \ln|x^2-1| = \ln|2x+3| - \ln|(x+1)(x-1)| = \\ &= \ln|2x+3| - \ln|(x+1)| - \ln|(x-1)| \end{aligned}$$

Då blir

$$f'(x) = \frac{2}{2x+3} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = 2 \cdot \frac{(x^2-1)-(2x+3)x}{(2x+3)(x^2-1)} = (-2) \cdot \frac{x^2+3x+1}{(2x+3)(x^2-1)}.$$

$\square$

**Exempel.** Beräkna derivatan av $e^{2x} \cdot \sqrt{x^3+1}$.

*Lösning.* Med kedjeregeln får man först att

$$\frac{d}{dx}(e^{2x}) = 2e^{2x} \quad \text{och} \quad \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^3+1}\right) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}.$$

Produktregeln ger nu att

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(e^{2x} \cdot \sqrt{x^3+1}\right) &= \frac{d}{dx}(e^{2x}) \cdot \sqrt{x^3+1} + e^{2x} \cdot \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^3+1}\right) = \\ &= 2e^{2x} \cdot \sqrt{x^3+1} + e^{2x} \cdot \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}} = \\ &= e^{2x}\frac{4(x^3+1)+3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}. \end{aligned}$$

$\square$

### 3.3.3 Övningar

**3.3.1** Bestäm $f'$ och $f'(2)$ om

a) $f(x) = x^5 + x$ b) $f(x) = x^3 + x^{-3/2}$ c) $f(x) = (x^2 - 3)^2$

d) $f(x) = 3e^{x+1}$ e) $f(x) = \ln(3x)$

**3.3.2** Bestäm en ekvation för tangenten till $f$ i den punkt på grafen där $x = a$ om

a) $f(x) = x^2 + 3x + 1$ och $a = -1$ b) $f(x) = x/(x^2+1)$ och $a = 2$ c) $f(x) = \ln x$ och $x = 3$

**3.3.3** Bestäm derivatan till $f$ om

a) $f(x) = 4(2x+1)/(x+2)$ b) $f(x) = e^x \ln x$ c) $f(x) = xe^{x^2+1}$

d) $f(x) = x^2 2^{-x}$ e) $f(x) = \sqrt{3x^4+7}$ f) $f(x) = \ln(7x+3) + \ln(1-x)$

g) $f(x) = e^{x^2} \cdot \ln(2x+7)$ h) $f(x) = e^{2x}/\sqrt{x^3+1}$ i) $f(x) = \ln(1+e^{\sqrt{x}})$

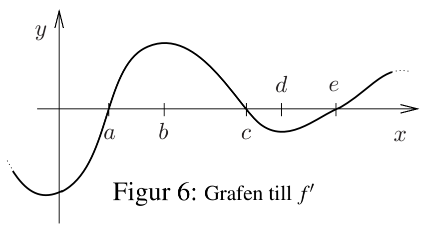
## 3.4 Derivatans tecken

När $f'(x)$ är positiv lutar tangenten till grafen av $f$ i punkten $(x, f(x))$ uppåt; där den är negativ lutar tangenten nedåt. Det är lätt att tro på följande:

> Om $f' \geq 0$ på ett intervall, så är $f$ växande där.
>
> Om $f' \leq 0$ på ett intervall, så är $f$ avtagande där.
>
> Om $f' = 0$ i alla punkter på ett intervall, så är $f$ konstant där.

**Exempel.** Var är funktionen $f(x) = x^4 - 4x^3$ avtagande respektive växande?

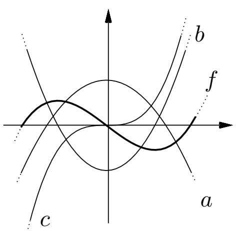
*Lösning.* Vi deriverar och får $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$, som är negativ om $x < 3$ och positiv om $x > 3$. Alltså är $f$ avtagande på intervallet $(-\infty, 3]$ och växande på intervallet $[3, \infty)$. □




Figur 6: Grafen till $f'$

**Exempel.** En funktion $f$ har en derivata vars graf illustreras i figur 6. På vilka av de intervall som antyds i figuren är funktionen växande respektive avtagande?

*Lösning.* Eftersom $f'$ är $\geq 0$ på intervallet $[a, c]$ är $f$ växande där. Eftersom $f'$ är $\leq 0$ på intervallet $[c, e]$ är $f$ avtagande där. □




Figur 7: Grafen till $f$ och tre andra funktioner.

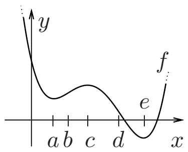
**Exempel.** I figur 7 syns grafen till funktionen $f$ och tre andra funktioner $a$, $b$ och $c$. En av dessa tre är grafen till $f'$. Vilken?

*Lösning.* Om vi tittar längst till vänster längs $x$-axeln i figuren kan vi se att $f$ växer där. Det betyder att derivatan är positiv där. Bara grafen till $b$ uppfyller detta villkor. Alltså är $b = f'$. □

**Exempel.** I figur 8 syns grafen till funktionen $f$ och fem punkter $a$, $b$, $c$, $d$ och $e$.

a) Var byter $f'$ tecken?

b) Gör en grov skiss över $f'$.



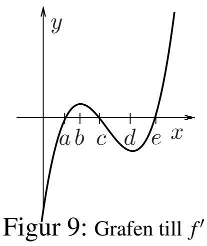
Figur 8: Grafen till $f$ och punkter på $x$-axeln.

*Lösning.*

a) I punkter på grafen vars första koordinat är $< a$ är tangentens lutning negativ, i punkter vars första koordinat är mellan $a$ och $c$ är den positiv, i punkter vars första koordinat är mellan $c$ och $e$ är den negativ och slutligen positiv i punkter vars första koordinat är $> e$ är tangentens lutning positiv.

Eftersom $f'(x)$ är riktningskoefficienten för tangenten i punkten på grafen vars första koordinat är $x$ ger detta att $f'$ växlar tecken i $a$, $c$ och $e$.

b) Baserat på denna information bör $f'$ ha en graf i stil med den i figur 9



Figur 9: Grafen till $f'$.

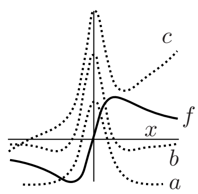
□

### 3.4.1 Övningar

**3.4.1** Avgör var $f$ är växande respektive avtagande om

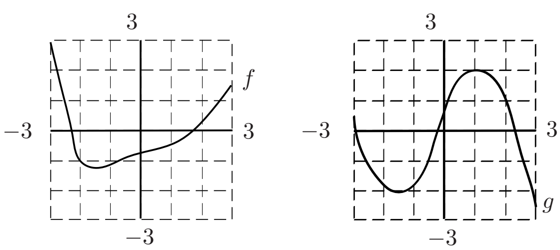
a) $f(x) = (x^2+1)^2$ b) $f(x) = (x^2-1)^2$ c) $f(x) = e^{x^2-x}$

**3.4.2** I figuren illustreras grafen till fyra funktioner. En är grafen till $f'$. Vilken?




**3.4.3** I figuren nedan illustreras grafen till två funktioner $f$ och $g$. Låt också $h(x) = f(g(x))$ och $k(x) = g(f(x))$. Uppskatta värdet av

a) $f'(-2{,}5)$ b) $g(1/2)$ c) $h'(1)$ d) $k'(-1)$



## 3.5 Derivator och konvexitet

Som vi sett har definitionen av derivata $f'(a)$ av en funktion $f$ i ett tal $a$, sin utgångspunkt i en önskan att mäta den “momentana” förändringen av funktionens värde i $a$. Eftersom denna i allmänhet är olika för olika tal $a$ är det naturligt att uppfatta derivatan som en ny funktion $f'$.

Om funktionen $f'$ i sin tur har en derivata kallas denna *andra derivatan av* $f$ och betecknas ofta med $f'', y'', \frac{d^2f}{dx^2}$ eller $D^2f$. Man kan sedan fortsätta att derivera flera gånger och få derivator av allt högre ordning. Bland olika beteckningar som finns för *derivatan av ordning n* är: $f^{(n)}, y^{(n)}, \frac{d^nf}{dx^n}, D^nf$.

**Exempel.** Bestäm $f^{(n)}$ då $f(x) = e^{2x}$.

*Lösning.* Vi observerar att $f'(x) = 2e^{2x}, f''(x) = 2 \cdot 2e^x = 2^2e^{2x}$. För varje gång vi deriverar kommer det fram en 2:a genom inre derivatan. Detta ger $f^{(n)}(x) = 2^ne^{2x}$. □

ANDRA DERIVATAN SOM ACCELERATION.

Låt oss tänka oss att vi färdas längs en väg med start vid tidpunkten $t = 0$. Den sträcka vi färdats efter $t$ minuter betecknar vi $x(t)$. Du känner säker till att $x'(t)$ är det som kallas *farten* vid tidpunkten $t$. Andraderivatan $x''(t)$ är ju derivatan av $x'(t)$ och alltså den hastighet med vilken $x'(t)$ ändras, d v s accelerationen.

ANDRADERIVATANS BETYDELSE FÖR GRAFEN TILL EN FUNKTION.

Med hjälp av $f''(x)$ kan vi se hur $f'(x)$ växer och avtar, d v s hur riktningskoefficienten för tangenten till grafen av $f(x)$ ändras då $x$ varierar. Exempelvis har vi

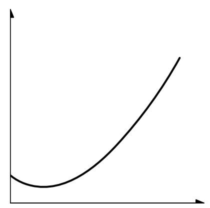
om $f''(x) \geq 0$ på ett intervall, så är $f'(x)$ växande på intervallet,
om $f''(x) \leq 0$ på ett intervall, så är $f'(x)$ avtagande på intervallet.

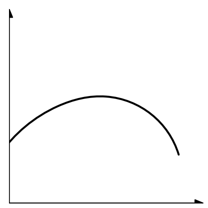
Lägg märke till att andraderivatan inte ger direkt information om förstaderivatans tecken, eller om ursprungsfunktionens tillväxt.

Populärt kan man säga att en funktion är konvex om grafen “vänder uppåt” på intervallet eller ser ut som åtminstone ena mungipan på en glad mun. Den är konkav om grafen i stället “vänder nedåt” på intervallet eller ser ut som del av en sur mun.

Generellt gäller att

om $f''(x) > 0$ på ett intervall, så är funktion $f$ konvex där,
om $f''(x) < 0$ på ett intervall, så är funktion $f$ konkav där.

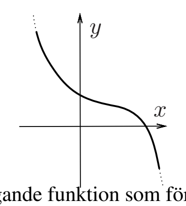




Följande två figurer illustrerar två typiska utseenden. Grafen till vänster visar en funktion med positiv andraderivata och därmed växande derivata, d v s $f$ är konvex. Den till höger, visar en med negativ andraderivata, alltså med avtagande derivata, d v s $f$ är konkav.

**Exempel.** Skissa grafen till en funktion med derivata som är negativ överallt, men vars andraderivata ibland är positiv och ibland negativ.

*Lösning.* Vi ska alltså para ihop delar av en glad och en sur mun och samtidigt se till att det blir grafen av en avtagande funktion. En sådan graf kan se ut som i figur 10. □



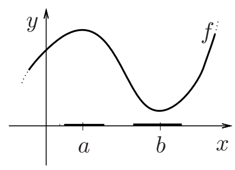

Figur 10: Grafen till en avtagande funktion som först är konvex och sedan konkav.

## 3.6 Max- och min-problem

Vi förutsätter att vi har en funktion $f$ som är definierad i alla tal i närheten av en punkt $x_0$. Om då $f(x) \leq f(x_0)$, för alla tal $x$ i något intervall runt $x_0$, så sägs $x_0$ vara en *lokal maximipunkt* för $f$.

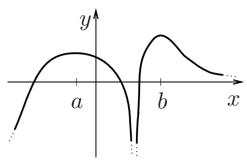
På liknande vis är $x_0$ en *lokal minimipunkt* om $f(x) \geq f(x_0)$ för alla $x$ i något intervall kring $x_0$.

I dessa fall säger man också att $f$ har ett lokalt maximum respektive minimum i $x_0$.




Figur 11: En lokal maximipunkt $a$ och minimipunkt $b$ till $f$.

I figur 11 är sådana intervall runt maximipunkten $a$ och minimipunkten $b$ till $f$ markerade.



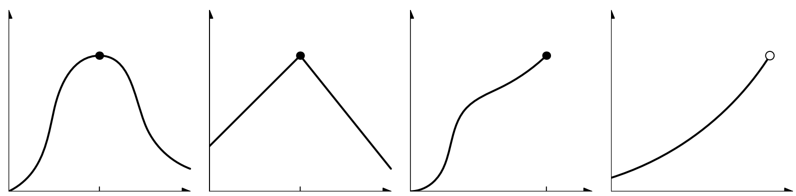

Figur 12: Funktionen $f$ har ett maximum i $b$, ett lokalt maximum i $a$, men minimum saknas.

Funktionens *värde* i en lokal maximi- respektive minimipunkt kallas lokalt *maximi-* respektive *minimivärde* till funktionen. Det är inte ovanligt att man i stället kallar sådana värden för *lokala maxima* respektive *minima*.

Ett värde till en funktion $f$ som är större än alla andra värden som funktionen antar kallas ett största värde, eller ett (globalt) maximum till $f$. På motsvarande sätt definieras ett minsta värde, eller ett (globalt) minimum till en funktion.

Man ska lägga märke till att det långt ifrån alltid är så att en funktion har sådana värden.

Ett funktionsvärde kan förstås vara ett lokalt maximum, utan att vara ett maximum. Men det är klart att om ett maximum finns så är det också ett lokalt maximum, och motsvarande för minimum.



Figur 13: Exempel på olika situationer att ta hänsyn till då man söker största/minsta värde till en funktion.

Vill man hitta lokala maximi- och minimipunkter till en funktion $f$ ska man leta bland följande tre typer av punkter:

1) Punkter $a$,, där $f'(a) = 0$, d v s där tangenten är parallell med $x$-axeln. En sådan punkt kallas en *stationär punkt* till $f$.

2) Punkter $a$, där $f'(a)$ inte finns, t ex spetsar på grafen.

3) *Randpunkter*, d v s ändpunkterna till definitionsintervallet.

Punkter som faller under 1) eller 2) kallas *kritiska punkter* till $f$. Det är viktigt att observera att en kritisk punkt till en funktion inte behöver vara ett lokalt maximum. Ett exempel på detta är funktionen $f(x) = x^3$, som är strängt växande men har derivatan 0 i $x = 0 : f'(x) = 3x^2$, så $f'(0) = 0$.

Stationära punkter som varken är lokala maximi- eller minimipunkter till funktionen kallas *terrasspunkter*.

För att avgöra om en stationär punkt är en lokal maximi- eller minimipunkt till en funktion kan man använda sig av någon av följande två metoder:

**Metod 1:**

- punkten $a$ är en *lokal maximipunkt* om $f'(x)$ växlar från positiv till negativ i $a$.
- punkten $a$ är en *lokal minimipunkt* om $f'(x)$ växlar från negativ till positiv i $a$.

**Metod 2:**

- punkten $a$ är en *lokal maximipunkt* om $f'(a) = 0$ och $f''(a) < 0$,
- punkten $a$ är en *lokal minimipunkt* om $f'(a) = 0$ och $f''(a) > 0$.

Det första fallet ger ju nämligen att $f'(x)$ avtar strängt nära $a$. Eftersom $f'(a) = 0$ betyder det att $f'$ växlar från positiv till negativ. På liknande vis förstår man att det andra fallet är samma som det andra fallet i Metod 1.

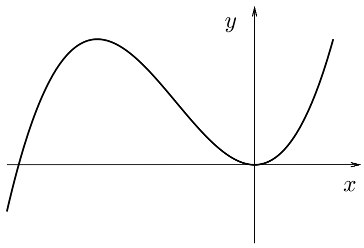
**Exempel.** Sök lokala maximi- och minimipunkter till $f(x) = x^3 + 6x^2$.

*Lösning.* Bilda först $f'(x) = 3x^2 + 12x = 3x(x+4)$. Ekvationen $f'(x) = 0$ har rötterna $x_1 = -4$ och $x_2 = 0$.

Teckenstudium:

| | $x < -4$ | $x = -4$ | $-4 < x < 0$ | $x = 0$ | $x > 0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+++$ | $0$ | $---$ | $0$ | $+++$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $32$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ |
| | (väx.) | (max.) | (avt.) | (min.) | (väx.) |

ger enligt Metod 1 lokalt maximum $f(-4) = (-4)^3 + 6 \cdot (-4)^2 = 32$ och lokalt minimum $f(0) = 0$. Alternativt kan man använda Metod 2: $f''(x) = 6x + 12 = 6(x+2)$ ger $f''(-4) = -12 < 0$, d v s maximum för $x = -4$, resp. $f''(0) = +12 > 0$, d v s minimum för $x = 0$. Punkterna 2) och 3) i vår undersökning ger ingenting eftersom $f'(x) = 3x^2 + 12x$ existerar för alla $x$, och randpunkter saknas, eftersom $f(x) = x^3 + 6x^2$ är definierat för alla $x, -\infty < x < \infty$.




Figur 14: En del av grafen till $f(x) = x^3 + 6x^2$.

*Svar:* Lokalt maximum $f(-4) = 32$ och lokalt minimum $f(0) = 0$.

Lägg märke till att funktionen $f(x) = x^3 + 6x^2$ saknar såväl största som minsta värde eftersom $f(x) \to +\infty$ då $x \to +\infty$ och $f(x) \to -\infty$, då $x \to -\infty$. □

**Exempel.** En fisk simmar med konstant hastighet motströms i en å som rinner med konstant hastighet $v_1$ (m/s). Studier har visat att om en fisk simmar med hastigheten $v$ (m/s) under $t$ sekunder, så ges den förbrukade energin $E$ av $E = cv^k t$, där $c$ och $k > 2$ är konstanter, som beror på fisksorten. Med vilken hastighet ska fisken i ån simma för att minimera energiåtgången?

*Lösning.* Låt oss säga att fisken simmar sträckan 1 (m) längs åkanten. Fisken rör sig längs den med hastigheten $v - v_1$, så det tar den $t = 1/(v - v_1)$ sekunder att simma sträckan.

Energiåtgången är då $E(v) = cv^k/(v - v_1)$. Vi vill hitta ett minimum till $E$, som är definierad i intervallet $(v_1, \infty)$.

Vi deriverar $E$ och får

$$E'(v) = \frac{kcv^{k-1}(v - v_1) - cv^k}{(v - v_1)^2} = cv^{k-1}\frac{(k-1)v - kv_1}{(v - v_1)^2}$$

Vi har att $E'(v) = 0$, precis när $v = kv_1/(k-1)$. Vi ser också att $E'$ byter tecken i $v = kv_1/(k-1)$, från negativt till positivt. Det betyder att $E$ har ett minimum i $v = kv_1/(k-1)$, så det är den hastighet som minimerar energiåtgången.

□

### 3.6.1 Övningar

**3.6.1** Sök lokala maxima och minima samt största och minsta värde till $f$ om

a) $f(x) = x^2 + 4x + 5$

b) $f(x) = 3x - x^3 + 2$

c) $f(x) = e^x - 2x$

d) $f(x) = x + \ln x - 2\ln(x-1)$

# 4 Differentialekvationer

Gamla orgelpipor i kyrkor är (eller var) ibland gjorda av tenn. Under kalla förhållnaden kan de angripas *tennpest,* så att tennet blir sprött och faller sönder till ett grått pulver. Detta kan gå ganska plötsligt eftersom själva förekomsten av pulvret påskyndar processen. I början när det bara finns lite grått pulver går processen långsamt. Likaså går den långsamt när det bara finns lite tenn kvar att bryta ned.

Vi är intresserade av att veta hur den här processen fortskrider; hur mycket tenn finns kvar efter en viss tid och när går nedbrytningen fortast?

Vi inför funktionen $q$ genom att säga att $q(t)$ är den mängd tenn som finns kvar vid tiden $t$. Om vi kände till en formel för $q$, skulle vi kunna svara på frågorna. Men vi har tillsynes inte mycket att gå på.

Vi är alltså i ett läge där vi söker en funktion $q$. När vi tidigare i den här kursen löst ekvationer har det som varit obekant varit ett tal, men nu är situationen annorlunda: det obekanta är en funktion.

Vi kan försöka göra en *modell* för situationen. $q'(t)$ är den takt med vilken tennet försvinner vid tiden $t$. Med tanke på den information vi fått kanske det inte är helt orimligt att anta att den är proportionell mot mängden tenn $q(t)$ vid den tidpunkten, men också proportionell mot mängden tenn som blivit ett grått pulver. Det sista bör vara $M - q(t)$, om $M$ är den ursprungliga mängden tenn. Detta gör det rimligt att anta

$$q'(t) = kq(t)(M - q(t)) \quad \text{eller kortare skrivet} \quad q' = kq(M - q),$$

där $k$ är någon konstant. Lägg märke till att högra ledet är litet om det bara finns lite grått pulver (för då är $M - q$ litet) men också om $q$ är litet.

Vi har gjort en rad antagande (som kan vara mer eller mindre rimliga) för att komma fram till detta. Vi har gjort en *matematisk modell*. Det är inget som säger att den måste vara korrekt; vi har inte underbyggt den med något teoretiskt resonemang kring kemiska reaktioner eller med experimentella data.

Vår funktion $q$ är ju egentligen inte obekant; den är bestämd av definitionen ovan. Vi inför därför beteckningen $y$ för en obekant funktion. Då är $y = q$ är då en lösning till ekvationen

$$y'(t) = ky(t)(M - y(t)) \quad \text{eller kortare skrivet} \quad y' = ky(M - y) \quad \left(\text{eller} \quad \frac{dy}{dt} = ky(M - y)\right).$$

Ekvationen kallas en *differentialekvation* för den involverar en obekant funktion $y$ och dess derivata $y'$. Att *lösa differentialekvationen* innebär att bestämma alla funktioner $y$ som har just egenskapen att derivatan $y'$ är precis samma funktion som $ky(M - y)$. Vi vet (eller tror oss veta) att $q$ är en sådan lösning.

Detta kapitel handlar om hur man kan lösa vissa typer av differentialekvationer, bland annat den för tennpest på orgelpipor. En stor del av matematiken i tillämpningar inom naturvetenskap handlar om att sätta upp korrekta modeller i form av differentialekvationer och att försöka lösa dem (exakt, eller om det inte går numeriskt).

**Exempel.** Visa att $y = A + Ce^{kt}$, där $A, C$ och $k$ är konstanter är en lösning till differentialekvationen

$$\frac{dy}{dt} = k(y - A)$$

.

*Lösning.* Med $y = A + Ce^{kt}$ blir vänstra ledet $y' = kCe^{kt}$, medan högra ledet blir $k(A + Ce^{kt} - A) = kCe^{kt}$. Alltså löser $y = A + Ce^{kt}$ differentialekvationen. □

**Exempel.** För vilket värde på $k$ är $y(x) = 5 + 3e^{kx}$ en lösning till differentialekvationen

$$y' = 10 - 2y?$$

*Lösning.* Med $y(x) = 5 + 3e^{kx}$ får vi

$$\begin{aligned} y' &= 3ke^{kx} \\ 10 - 2y &= -6e^{3k} \end{aligned}$$

Raderna ska ha samma högerled, så vi måste ha $k = -2$. □

**Exempel.** Är $y = t^3$ en lösning till differentialekvationen

$$ty' - 3y = 0?$$

*Lösning.* Med $y = t^3$ får vi

$$ty' - 3y \quad = \quad t(3t^2) - 3t^3 = 0,$$

så svaret är: ja. □

### 4.0.2 Övningar

**4.0.1** De tre funktionerna $f(x) = x^2 - 2x + 2$, $g(x) = 1 - e^{-x^2/2}$ och $h(x) = x^2$ löser vars en av differentialekvationerna nedan. Vilken?

a) $y' = x(1-y)$ b) $y' + y = x^2$ c) $xy' = 2y$.

**4.0.2** Bestäm konstanterna $a$ och $b$ så att $f(x) = a + e^{bx}$ löser differentialekvationen $y' = 1 - y$.

**4.0.3** Vad ska $C$ och $n$ vara för att $f(x) = Cx^n$ ska lösa differentialekvationen $xy' - 3y = 0$?

**4.0.4** Kvantiteten av ett läkemedel som finns i kroppen hos en patient avtar i en takt som är proportionell mot den mängd som finns kvar i kroppen. Låt $f(t)$ vara kvantiteten som finns i kroppen vid tiden $t$. Ange en differentialekvation som $f$ löser.

**4.0.5** Om information sprid från mun till mun i en population kan man förvänta sig att den takt de som har kännedom om informationen ökar är proportionell mot produkten av antalet som känner till informationen och antalet som inte gör det. Låt $f(t)$ vara antalet som känner till informationen vid tiden $t$ och $M$ vara antalet individer i populationen. Skriv upp en differentialekvation som $f$ löser.

**4.0.6** Den takt med vilken ett istäcke växer till vid konstant temperatur antas vara omvänt proportionell mot isens tjocklek. Det betyder att en tjockare is växer långsammare än en tunn. Låt $f(t)$ vara isens tjocklek vid tiden $t$. Skriv upp en differentialekvation som $f$ löser.

## 4.1 Primitiva funktioner

Den enklaste typen av differentialekvationer är den där vi känner till derivatan av den obekanta funktionen:

$$y'(t) = f(t),$$

där $f(t)$ är en känd funktion.

**Exempel.** Bestäm en lösning till ekvationen $y'(t) = t^2 - 1/t^2$.

*Lösning.* Vi börjar med att hitta en funktion med $t^2$ som derivata. En sådan är $t^3/3$, eftersom $D(t^3/3) = 3t^2/3 = t^2$. En funktion med $-t^{-2}$ som derivata är t ex $t^{-1}$, eftersom $D(t^{-1}) = -t^{-2}$. Om vi sätter $y(t) = t^3/3 + t^{-1}$. Så har vi alltså $y'(t) = t^2 - 1/t^2$.

Lägg märke till att också $y(t) = t^3/3 + t^{-1} + C$, där $C$ är en godtycklig konstant har derivata $y'(t) = t^2 - 1/t^2$. □

> Låt $f$ vara en funktion definierad på ett intervall. En funktion $F$ är en **primitiv funktion** till $f$ på ett intervall om $F'(x) = f(x)$ där.
> Att lösa $y' = f$ är det samma som att bestämma alla primitiva funktioner till $f$.

Att bestämma en primitiv funktion är alltså det omvända till att derivera.

Exempelvis är alltså $F(x) = x^2$ en primitiv funktion till $f(x) = 2x$, eftersom $D(x^2) = 2x$. Också $F(x) = x^2 + 1$ är en primitiv funktion till $2x$. I själva verket är ju $F(x) = x^2 + C$ primitiv funktion till $2x$ för varje val av konstant $C$. Följande sats innebär att $f(x) = 2x$ inte har några andra primitiva funktioner.

> Om $F_0$ är *en* primitiv funktion till $f$ på ett intervall, så ges *alla* primitiva funktioner till $f$ där av
> $$F(x) = F_0(x) + C \quad \text{där} \quad C \quad \text{är en godtycklig konstant.}$$

Att bestämma primitiva funktioner är en fråga om att använda sina deriveringskunskaper baklänges. Följande beteckning är vanlig i samband med primitiva funktioner.

> Med den *obestämda integralen* av $f$, $\int f(x)\,dx$, menas alla primitiva funktioner till $f$.

1. $\int x^b\,dx = \dfrac{x^{b+1}}{b+1} + C$ om $b \neq -1$
2. $\int x^{-1}\,dx = \ln|x| + C$
3. $\int e^x\,dx = e^x + C$
4. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $(0 < a \neq 1)$
5. $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$

Tabell 2: Några standardintegraler

Att formlerna stämmer kontrolleras genom att högerledens derivator jämförs med funktionerna efter integraltecknet i motsvarande vänsterled. Att till exempel att $\ln|x|$ har derivatan $1/x$ vet vi sedan tidigare, vilket ger nummer 2 i tabell 2. I just detta exempel finns en liten komplikation eftersom defintionsmängden till $\ln|x|$ inte är ett intervall utan föreningen av två sådana: $(-\infty, 0)$ och $(0, \infty)$. Det betyder att talet $C$ i formeln kan vara olika på de två delarna.

På samma sätt har vi, eftersom $a^x = e^{x\ln a}$, genom att använda kedjeregeln att

$$D\Big(\frac{a^x}{\ln a}\Big) = \frac{1}{\ln a} D(e^{x\ln a}) = \frac{1}{\ln a} \cdot e^{x\ln a} \cdot D(x\ln a) = \frac{1}{\ln a} \cdot e^{x\ln a} \cdot \ln a = e^{x\ln a} = a^x$$

vilket ger nummer 4 i tabell 2. De andra formlerna visas på liknande sätt.

De kända deriveringsreglerna ger också upphov till motsvarigheter för integration. För att bevisa följande formler så jämför man de båda sidornas derivator.

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx,\ k \text{ en konstant}$$

Vi tillämpar nu dessa regler på ett par exempel.

**Exempel.** Beräkna alla primitiva funktioner till $e^x + 4x$.

*Lösning.* Genom att använda reglerna ovan och två av standardintegralerna i tabell 2 har vi att

$$\int (e^x + 4x)\,dx = \int e^x\,dx + 4\int x\,dx = e^x + 4x^2/2 + C = e^x + 2x^2 + C. \qquad \square$$

Låt $k$ vara en konstant och antag att $f = F'$, dvs att $F$ är en primitiv funktion till $f$. Kedjeregeln och produktregeln för derivering ger

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{k}F(kx)\right) = 0 + \frac{1}{k}(kF'(kx)) = F'(kx) = f(kx).$$

Det betyder att

$$\int f(kx)\,dx = \frac{F(kx)}{k},$$

vilket är en mycket användbar formel. En annan formel får vi om vi istället för att multiplicera med en konstant $k$ adderar $k$:

$$\frac{d}{dx}\big(F(k+x)\big) = F'(k+x) = f(k+x).$$

Det betyder att
$$\int f(k+x)\,dx = F(k+x),$$

**Exempel.** Beräkna alla primitiva funktioner till $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$.

*Lösning.* Vi har att $f(x) = (1-2x)^{-1/2}$. Enligt den första standardintegralen i tabell 2 är
$$\int x^{-1/2}\,dx = \frac{x^{1+(-1/2)}}{1+(-1/2)} + C = \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C.$$
Den första regeln ovan ger
$$\int (-2x)^{-1/2}\,dx = 2\frac{1}{(-2)}(-2x)^{1/2} + C = -(-2x)^{1/2} + C.$$
Då ger den andra regeln att
$$\int (1-2x)^{-1/2}\,dx = 2\frac{1}{(-2)}(1-2x)^{1/2} + C = -(1-2x)^{1/2} + C = -\sqrt{1-2x} + C.$$
□

### 4.1.1 Övningar

**4.1.1** Bestäm alla primitiva funktioner till $f$ om

a) $f(x) = x^3 + 4x$ b) $f(x) = x^{-1/2}$ c) $f(x) = \dfrac{1}{x} + e^x$ d) $f(x) = 10^x$

**4.1.2** Bestäm alla primitiva funktioner till $f$ om

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ b) $f(x) = e^{3x}$ c) $f(x) = \dfrac{1}{x+5}$ d) $f(x) = \sqrt{1-x}$

**4.1.3** Visa att man kan integrera
$$f(x) = \frac{1}{(x-b)(x-a)},$$
där $a \neq b$ är konstanter, genom att göra omskrivningen
$$\boxed{\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b}\Big(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\Big).}$$
Vilka är de primitiva funktionerna till $f$?

## 4.2 Separabla differentialekvationer

Antag att den differentialekvation kan skrivas som
$$h(y(x))y'(x) = f(x),$$
där $h$ och $f$ är kända funktioner och $y$ en obekant funktion med variabeln $x$. Om vi lyckas hitta en primitiv funktion $H$ till $h$ kommer vi, enligt kedjeregeln att ha att
$$D(H(y(x)) = h(y(x))y'(x) = f(x).$$
Om nu $F(x)$ är en får vi $H(y(x)) = F(x) + C$, där $C$ är en godtycklig konstant. Förhoppningsvis kan vi lösa ut $y(x)$ ur detta samband.

Det intressanta är att vi får samma resultat om vi räknar så här:

$$
\begin{aligned}
h(y)\frac{dy}{dx} &= f(x) \qquad \text{Egentligen otillåten uppdelning av } \quad \frac{dy}{dx}: \\
h(y)\,dy &= f(x)\,dx \qquad \text{Vi integrerar} \quad : \\
\int h(y)\,dy &= \int f(x)\,dx \\
H(y) &= F(x)+C
\end{aligned}
$$

Det som inte är tillåtet är uppdelningen av $dy/dx$ som är en sammanhållen beteckning för derivatatan till $y$; $dy$ och $dx$ har egentligen ingen mening var för sig. Men det visar sig alltså att det inte spelar nån roll att man tillåter sig det i det här sammanhanget, vilket förenklar räknandet.

En differentialekvation som, efter omskrivning, kan skrivas $h(y(x))y'(x) = f(x)$ kallas *separabel*, för informellt kan man skriva $h(y)\,dy = f(x)\,dx$, så att $y$ förefaller vara en variabel i vänsterledet, medan $x$ är variabeln i högerledet; variablerna är separerade. Separabla differentialekvationer är vanligt förekommande inom tillämpningar i naturvetenskap.

**Exempel.** Man vet att $f(x)$ löser differential ekvationen $dy/dx = ky$ och att $f(0) = 2$. Vad är då $f(4)$?

*Lösning.* Vi separerar variablerna och får $dy/y = k\,dx$. Divisionen är tillåten om $y \neq 0$. Vi ser att $y = 0$ faktiskt löser differentialekvationen, men vi bortser från det nu.

Integration av båda sidor ger $\ln|y| = kx + C_1$, där $C_1$ är en godtycklig konstant. Exponentiering get $y = \pm e^{C_1}e^{kx}$, eller $y = Ce^{kx}$ där $C = \pm e^{C} - 1$ är en godtycklig konstant som inte är 0. Med tanke på att även $y = 0$ löser ekvationen har vi att alla lösningar ges av

$$y = Ce^{kx} \quad \text{där } C \text{ är en godtycklig konstant.}$$

Vi vet nu att $f(x) = Ce^{kx}$, för något val av $C$. Eftersom $2 = f(0) = Ce^0 = C$, är $f(x) = 2e^{kx}$. Detta ger att $f(4) = 2e^{4k}$. $\square$

Av exemplet ser vi

> Lösningarna till
>
> $$\frac{dy}{dx} = ky,$$
>
> där $k$ är en konstant, ges av
>
> $$y = Ce^{kx},$$
>
> där $C$ är en godtycklig konstant.

**Exempel.** Vi studerar befolkningsutvecklingen i ett land med obegränsade resurser (ingen kamp för att överleva mellan individer) och en konstant immigration av $b$ individer per år. Låt $n(t)$ vara befolkningen vid tiden $t$ mätt i år. Det finns anledning att tro, om vi bortser från immigrationen, att den takt med vilken befolkningen ökar vid en tidpunkt $t$, är proportionell mot antalet individer i befolkningen vid den tiden, d v s att $dn/dt - b = an$, för någon (positiv) konstant $a$, som är den takt med vilken den inhemska befolkningen växer per kapita. Det betyder att $n$ är en lösning till differentialekvationen

$$y' = ay + b$$

Om vi sätter $c = b/a$ får vi $y' = a(y+c)$ och kan lätt separera variablerna

$$\frac{dy}{y+c} = a\,dt,$$

underförutsättning att $y + c \neq 0$, d v s att $y \neq -c$. Vi ser att $y = c$ faktiskt löser differentialekvationen, men vi bortser från det för tillfället.

Integration ger nu $\ln|y+c| = at + d_1$, där $d_1$ är en godtycklig konstant. Exponentiering leder till $y + c = \pm e^{d_1}e^{at} = d_2e^{at}$, där $d_2$ är en godtycklig konstant som inte är 0. Eftersom $y = -c$ också löser ekvationen kan vi säga att $d$ även kan vara 0. Detta ger

$$y = de^{at} - b/a.$$

Det betyder att $n(t) = de^{at} - b/a$, för nåt val av $d$.

Om vi låter $n_0 = n(0) = d - b/a$, d v s $n_0$ är befolkningens storlek vid tiden $t = 0$, har vi att $d = n_0 + b/a$. Vi kan skriv vår funktion som en summa av två exponentialfunktioner

$$n(t) = n_0 e^{at} + \frac{b}{a}(e^{at} - 1),$$

där den första exponentialfunktionen bara beror på befolkningens nativitet medan den andra beror på invandringens takt i förhållande till nativiteten.

□

**Exempel.** Vi löser som avslutning problemet med tennpest på orgelpipor.

Det ledde till differentialekvationen $y' = ky(M - y)$, där $y$ är en funktion av tiden $t$, så att $y' = dy/dt$.

Variablerna är inte separerade, men vi gör en omskrivning:

$$\frac{1}{y(M-y)} \frac{dy}{dt} = k,$$

Det är inte tillåtet om $y = 0$ eller om $y = M$. De båda funktionerna som är konstant lika med 0 och $M$ löser faktiskt differentialekvationen. De motsvarar att inget tenn finns att angripa respektive att inget tenn är angripet.

Vi separerar:

$$\frac{dy}{y(M-y)} = k\,dt.$$

Integration ger nu

$$\int \frac{dy}{y(M-y)} = kt + C_1,$$

där $C_1$ är en godtycklig konstant.

Det återstår att hitta en primitiv funktion till $1/(y(M-y))$. För att göra det skriver vi om

$$\frac{1}{y(M-y)} = \frac{1}{M}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{M-y}\right).$$

Integration av ger nu

$$\frac{1}{M}\Big(\ln|y| - \ln|M-y|\Big) = kt + C \quad \text{eller} \quad \ln\left|\frac{y}{M-y}\right| = Mkt + C_2,$$

där vi skrivit $C_2$ för konstanten $MC$. Exponentiering ger till sist

$$\frac{y}{M-y} = \pm e^{c_2} e^{Mkt} = Ce^{Mkt},$$

där $C_3 = \pm e^{C_2}$ är en konstant (som inte kan vara 0).

Det återstår nu att lösa ut $y$ ur detta. För att förenkla för oss kan vi skriva $f = C_3 e^{Mkt}$. Vi får då

$$\begin{aligned}
\frac{y}{M-y} &= f \qquad \text{Multiplicera med} \quad M - y: \\
y &= f(M-y) \qquad \text{Samla } y \text{ i vänsterledet:} \\
y(1+f) &= fM \qquad \text{Dela med} \quad (1+f): \\
y &= \frac{MC_3 e^{Mkt}}{1 + C_3 e^{Mkt}} = \frac{M}{Ce^{-Mkt} + 1},
\end{aligned}$$

där vi i sista steget delat täljare och nämnare med $f$ och skrivit $C$ för $1/C_3$. □

### 4.2.1 Övningar

**4.2.1** Lös följande differentialekvationer

a) $y' = x(1-y)$ b) $xy' = 2y$ c) $y' = 1-y$

**4.2.2** Kvantiteten av ett läkemedel som finns i kroppen hos en patient avtar i en takt som är proportionell mot den mängd som finns kvar i kroppen. Låt $f(t)$ vara kvantiteten som finns i kroppen vid tiden $t$. Ange en differentialekvation som $f$ löser och bestäm $f$. Efter 2 timmar var hälften av kvantiteten kvar. Hur länge efter intag av medicinen är 10% kvar i kroppen?

**4.2.3** Den takt med vilken ett istäcke växer till vid konstant temperatur antas vara omvänt proportionell mot isens tjocklek. Det betyder att en tjockare is växer långsammare än en tunn. Låt $f(t)$ vara isens tjocklek (cm) vid tiden $t$ (i timmar). Skriv upp en differentialekvation som $f$ löser och bestäm $f$ om isens tjocklek är 1 cm vid tiden $t = 0$ och 2 cm efter 1 timme. När är isens tjocklek 3 cm?

**4.2.4** Om information sprid från mun till mun i en population kan man förvänta sig att den takt de som har kännedom om informationen ökar är proportionell mot produkten av antalet som känner till informationen och antalet som inte gör det. Låt $f(t)$ vara antalet som känner till informationen vid tiden $t$ och $M$ vara antalet individer i populationen. Skriv upp en differentialekvation som $f$ löser och bestäm $f$ om bara en person kände till informationen vid tiden $t = 0$.

# 5 Förslag till svar

1.1.1 (a) 319 (b) $-564$

1.1.2 (a) $a-2ab$ (b) $2a^2b+2ab^2-2a^2-2ab$

1.1.3 (a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{17}{20}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{10}{57}$ (e) $-2$

1.1.4 (a) $\frac{3x-3}{x(x-3)}$ (b) $\frac{2}{x(2-x)}$ (c) $\frac{2x}{4-x^2}$ (d) $\frac{2+17x}{(1+x)(4x-1)}$

1.3.1 (a) 25 (b) 32 (c) 91 (d) 1

1.3.2 (a) $\frac{1}{4}$ (b) $-\frac{1}{27}$ (c) $\frac{4}{21}$

1.3.3 (a) 3 (b) $\frac{1}{2}$ (c) 2 (d) 9 (e) 5 (f) 8 (g) 1

1.4.1 (a) $3b+2c$ (b) $4a-2c$ (c) $-27a^4b^5c^4$ (d) $27x^6y^3$ (e) $36-x^2$ (f) $a^4-y^2$

1.4.2 (a) $2x^2+3xy-2y^2$ (b) $2x^3+x^2y-5xy^2+2y^3$

1.4.3 (a) $\frac{2}{b-a}$ (b) $-\frac{1}{(x-y)^2}$ (c) $a^3+a^2b+ab^2+b^3$

1.4.4 (a) $x = 17/2$ (b) $x = 4$ och $x = 1$ (c) $x = 1$ och $x = 7$

(d) $x = 0$ och $x = 3$ (e) $x = (1+\sqrt{97})/6$ (f) $x = 1/7$ och $x = 3/2$

1.4.5 (a) $(x+2)^2-7$ (b) $(x-3/2)^2-1/4$ (c) $(x-1/6)^2+179/36$

1.4.6 (a) $7/4$ (b) $-2$.

1.4.7 (a) $x = 1$, om $c \neq 0$ och $a \neq 0$. Annars kan $x$ vara vad som helst.

(b) $x = (a+c)/b$, om $b \neq 0$. Om $b = 0$, så är $c = -a$ och $x$ kan vara vad som helst.

(c) $x = 0$ eller $x = a(1-c)$

(d) $x = 1+1/d$, om $d \neq 0$ och $c \neq 0$. Om $d = 0$ eller $c = 0$ kan $x$ vara vad som helst.

(e) $x = 1/4 \pm \sqrt{\frac{a-8c}{16a}}$, om $a \neq 0$. Om $a = 0$ kan $x$ vara vad som heltst.

2.1 (a) matchar andra grafen (b) matchar första grafen (c) matchar fjärde grafen

2.2 Att antalet invånare 1996 var 53 tusen.

2.3 (a) Att bilen är värd 63 tusen kronor efter 5 år.
(b) Avtagande.
(c) Förmodligen konkav i under de första åren och sedan konvex.

2.1.1 (a) $f(2)=0$, $f(t)=-t+2$, avtagande. (b) $f(2)=21/5$, $f(t)=4t/5+13/5$, växande.
(c) $f(2)=5/7$, $f(t)=-6t/7+17/7$, avtagande.

2.1.2 (i) är linjen i d), (ii) är linjen i f), (iii) är linjen i e), (iv) är linjen i d), (v) är linjen i a) och (vi) är linjen i b).

2.1.3 (a) (iii) (b) (i) (c) (ii)

2.1.4 (i) är grafen till polynomet i b), (ii) är grafen till polynomet i c) och (iii) är grafen till polynomet i a)

2.2.1 (a) $f(2)=2\sqrt{2}$, avtagande och konvex. (b) $f(2)=3$, växande och konvex.
(c) $f(2)=2^{4/3}$, vaäxande och konkav.

2.2.2 (a) $0,007\cdot 65^{17/40}\cdot 160^17/40\approx 1.6$ kvadratmeter
(b) $\dfrac{(1500)^{40/17}}{7^{40/17}180^{29/17}}$
(c) $h=\left(\dfrac{1000a}{7}\right)^{40/29}70^{17/29}$

2.2.3 (i): $f(x)=3\cdot 2^x$, (ii): $f(x)=2^{2-x}$, (iii): $f(x)=2\cdot 3^x$, (iv): $f(x)=4(1-2^{-x})$

2.2.4 (a) exponentiellt växande (b) exponentiellt avtagande
(c) exponentiellt växande (d) exponentiellt avtagande

2.4.1 (a) 2 (b) $1/2$ (c) $-1$ (d) $-2$ (e) 7 (f) $1/3$

2.4.2 (a) 3 (b) $-2$ (c) 4 (d) $0,7$ (e) $1/4$ (f) 2

2.4.3 (a) $\ln(a^3)$ (b) $\ln(ab^2)$ (c) $\ln(a^c/b)$ (d) $\ln(e^c/b^3)$

2.4.4 $f(x)=10^{(x-1)/2}$, $g(x)=10^{3-x/2}$ och $h(x)=10^{x+1}$.

2.4.5 $f(x)=e^{-1/2}x^{1/2}$, $g(x)=e^3x^{-1/2}$ och $h(x)=ex$

2.5.1 (a) $\ln 3/\ln 2$ (b) $x = -1/(2\ln 3) = 1/\ln 9x$ (c) $\sqrt{e^2+1}$
(e) Saknar lösning (f) 1

2.5.2 $2^{-40/29}$

2.5.3 $\ln 3$

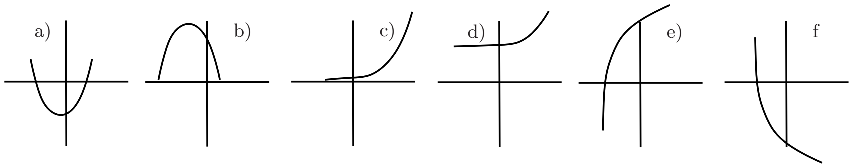
2.5.4 Eftet $20(\ln(155)-\ln(105))/(\ln(155)-\ln(145))\approx 118$ minuter.

2.5.5 $5\ln(3)/\ln(2)$ timmar.

2.5.6 (a) 10 mg
(b) $8,2$ mg
(c) $10\cdot 8,2^6\approx 3,0$ mg
(d) $-ln10/ln(0,82)\approx 11,6$ timmar.

2.6.1 (a) $t^2+2t+2$ (b) $t^4+6t^2+10$ (c) $t^4+2t^2+4$

2.6.2 (a) $3x^4+1$ (b) $9x^4+6x^2+1$




2.6.3

2.6.4 $\ln\Big(\dfrac{(x-1)^2}{x+1}\Big)$

2.6.5 (a) $0,3$ (b) $-1$ (c) $-0,4$ (d) $1$

3.3.1 (a) $f'(x)=5x^4+1$, och $f'(2)=81$
(b) $f'(x)=3x^2-3x^{-5/2}/2$ och $f'(2)=12-3\sqrt{2}/16$
(c) $f'(x)=4x^3-12x$ och $f'(2)=8$
(d) $f'(x)=3e^{x+1}$ och $f'(2)=3e^3$
(e) $f'(x)=1/x$ och $f'(2)=1/2$

3.3.2 (a) $y=x$ (b) $y=(-3x+16)/25$ (c) $y=x/3+\ln(3/e)$

3.3.3 (a) $f'(x)=3/(x+2)^2$ (b) $e^x(1-1/x)$ (c) $f'(x)=e^{x^2+1}(1+2x^2)$

(c) $f'(x)=2^{-x}(2x-\ln 2\cdot x^2)$ (d) $f'(x)=6x^3/\sqrt{3x^4+7}$

(f) $f'(x)=\dfrac{7}{7x+3}-\dfrac{1}{1-x}$ (g) $f'(x) = 2e^{x^2}\cdot\big(x\ln(2x+7)+1/(2x+7)\big)$

(h) $e^{2x}\big(2(x^3+1)-\frac{3}{2}x^2\big)/\big(x^3+1\big)^{3/2}$ (i) $f'(x)=\Big(2\sqrt{x}\big(e^{-\sqrt{x}}+1\big)\Big)^{-1}$

3.4.1 (a) Växande på $[0,\infty)$ och avtagande på $(-\infty,0]$
(b) Växande på $[-1,0]$ och $[1,\infty)$ och avtagande på $(-\infty,-1]$ och $[0,1]$
(c) Växande på $[1/2,\infty)$ och avtagande på $(-\infty,1/2]$

3.4.2 $f'=b$

3.4.3 (a) $f'(-2,5)\approx-4$ (b) $g(0,5)\approx 1$ (c) $h'(1)\approx 0$ (d) $k'(-1)\approx 0,25$

3.6.1 (a) Minsta värde: $f(-2)=1$ (även lokalt minimum); inget lokalt maximum
(b) Lokalt minimum: $f-1)=0$ , lokalt maximum: $f(1)=4$, inget minst eller störst värde
(c) Minsta värde: $f(\ln 2)=2-2\ln 2$
(d) Minsta värde: $f(1+\sqrt{2})=1+\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})-\ln 2$

4.1 $y'=ky$, för någon konstant $k$

4.2 $y'=ky(M-y)$, för någon konstant $k$

4.3 $y'=k/y$, för någon konstant $k$

4.1.1 (a) $F(x) = x^4/4 + 2x^2 + C$ (b) $F(x) = 2\sqrt{x} + C$

(c) $F(x) = \ln x + e^x + C$ (d) $F(x) = 10^x / \ln x + C$

4.1.2 (a) $F(x) = 2\sqrt{1+x} + C$ (b) $F(x) = e^{3x}/3 + C$

(c) $F(x) = \ln(x+5) + C$ (d) $F(x) = -\frac{2}{3}(1-x)^{3/2} + C$

4.1.3 $F(x) = \dfrac{1}{a-b} \ln\left|\dfrac{x-a}{x-b}\right| + C$

4.1.1 Lös följande differentialekvationer

(a) $y = 1 + Ce^{x^2}$, där $C$ är en godtycklig konstant.
(b) $y = Cx^2$, där $C$ är en godtycklig konstant.
(c) $1 + Ce^{-x}$, där $C$ är en godtycklig konstant.