4.2.1 Övningar

4.2.1 Lös följande differentialekvationer

a) $y' = x(1-y)$ b) $xy' = 2y$ c) $y' = 1-y$

4.2.2 Kvantiteten av ett läkemedel som finns i kroppen hos en patient avtar i en takt som är proportionell mot den mängd som finns kvar i kroppen. Låt $f(t)$ vara kvantiteten som finns i kroppen vid tiden t. Ange en differentialekvation som f löser och bestäm f. Efter 2 timmar var hälften av kvantiteten kvar. Hur länge efter intag av medicinen är 10% kvar i kroppen?

4.2.3 Den takt med vilken ett istäcke växer till vid konstant temperatur antas vara omvänt proportionell mot isens tjocklek. Det betyder att en tjockare is växer långsammare än en tunn. Låt $f(t)$ vara isens tjocklek (cm) vid tiden t (i timmar). Skriv upp en differentialekvation som f löser och bestäm f om isens tjocklek är 1 cm vid tiden $t = 0$ och 2 cm efter 1 timme. När är isens tjocklek 3 cm?

4.2.4 Om information sprid från mun till mun i en population kan man förvänta sig att den takt de som har kännedom om informationen ökar är proportionell mot produkten av antalet som känner till informationen och antalet som inte gör det. Låt $f(t)$ vara antalet som känner till informationen vid tiden t och M vara antalet individer i populationen. Skriv upp en differentialekvation som f löser och bestäm f om bara en person kände till informationen vid tiden $t = 0$.

5 Förslag till svar

1.1.1 (a) 319 (b) -564

1.1.2 (a) $a+2ab$ (b) $2a^2b+2ab^2-2a^2-2ab$

1.1.3 (a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{17}{20}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{10}{57}$ (e) -2

1.1.4 (a) $\frac{3x-3}{x(x-3)}$ (b) $\frac{2}{x(2-x)}$ (c) $\frac{2x}{4-x^2}$ (d) $\frac{2+17x}{(1+x)(4x-1)}$

1.3.1 (a) 25 (b) 32 (c) 91 (d) 1

1.3.2 (a) $\frac{1}{4}$ (b) $-\frac{1}{27}$ (c) $\frac{4}{21}$

1.3.3 (a) 3 (b) $\frac{1}{2}$ (c) 2 (d) 9 (e) 5 (f) 8 (g) 1

1.4.1 (a) $3b+2c$ (b) $4a-2c$ (c) $-27a^4b^5c^4$ (d) $27x^6y^3$ (e) $36-x^2$ (f) a^4-y^2

1.4.2 (a) $2x^2+3xy-2y^2$ (b) $2x^3+x^2y-5xy^2+2y^3$

1.4.3 (a) $\frac{2}{b-a}$ (b) $-\frac{1}{(x-y)^2}$ (c) $a^3+a^2b+ab^2+b^3$

1.4.4 (a) $x=17/2$ (b) $x=4$ och $x=1$ (c) $x=1$ och $x=7$

(d) $x=0$ och $x=3$ (e) $x=1$ och $x=-2/3$ (f) $x=1/7$ och $x=3/2$

1.4.5 (a) $(x+2)^2-7$ (b) $(x-3/2)^2-1/4$ (c) $(x-1/6)^2+179/36$

1.4.6 (a) $7/4$ (b) $-2.$

1.4.7 (a) $x=1$, om $c\neq 0$ och $a\neq 0$. Annars kan x vara vad som helst.
(b) $x=(a+c)/(ab)$, om $b\neq 0$. Om $b=0$, så är $c=-a$ och x kan vara vad som helst.
(c) $x=0$ eller $x=a(1-c)$
(d) $x=1+1/d$, om $d\neq 0$ och $c\neq 0$. Om $d=0$ eller $c=0$ kan x vara vad som helst.
(e) $x=1/4\pm\sqrt{\frac{a-8c}{16a}}$, om $a\neq 0$. Om $a=0$ kan x vara vad som heltst.

2.1 (a) matchar andra grafen (b) matchar första grafen (c) matchar fjärde grafen

2.2 Att antalet invånare 1996 var 53 tusen.

2.3 (a) Att bilen är värd 63 tusen kronor efter 5 år.
(b) Avtagande.
(c) Förmodligen konkav i under de första åren och sedan konvex.

2.1.1 (a) $f(2) = 0$, $f(t) = -t + 2$, avtagande. (b) $f(2) = 21/5$, $f(t) = 4t/5 + 13/5$, växande.
(c) $f(2) = 5/7$, $f(t) = -6t/7 + 17/7$, avtagande.

2.1.2 (i) är linjen i c), (ii) är linjen i f), (iii) är linjen i e), (iv) är linjen i d), (v) är linjen i a) och (vi) är linjen i b).

2.1.3 (i) är grafen till polynomet i b), (ii) är grafen till polynomet i c) och (iii) är grafen till polynomet i a)

2.1.4 (a) (iii) (b) (i) (c) (ii)

2.2.1 (a) $f(2) = 2\sqrt{2}$, avtagande och konvex. (b) $f(2) = 3$, växande och konvex.
(c) $f(2) = 2^{4/3}$, vaäxande och konkav.

2.2.2 (a) $0,007 \cdot 64^{17/40} \cdot 160^{29/40}$ kvadratmeter
(b) $\dfrac{(1500)^{40/17}}{7^{40/17}180^{29/17}}$
(c) $h = \left(\dfrac{1000a}{7}\right)^{40/29} \cdot \dfrac{1}{70^{17/29}}$

2.2.3 (i): $f(x) = 3 \cdot 2^x$, (ii): $f(x) = 2^{2-x}$, (iii): $f(x) = 2 \cdot 3^x$, (iv): $f(x) = 4(1 - 2^{-x})$

2.2.4 (a) exponentiellt växande (b) exponentiellt avtagande
(c) exponentiellt växande (d) exponentiellt avtagande

2.3.1 (a) Förmodligen inte.
(b) $f(15)$ är vikten vid 15 års ålder. $f^{-1}(15)$ är den ålder när vikten är 15 kg.
(c) ?

2.3.2 (a) $f^{-1}(x) = (x+2)^{1/3}$ (b) Ej inverterbar
(c) $f^{-1}(x) = (5-x)/4$ (d) $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x-1}$

2.4.1 (a) 2 (b) $1/2$ (c) -1 (d) -2 (e) 7 (f) $1/3$

2.4.2 (a) 3 (b) -2 (c) 4 (d) $0,7$ (e) $1/4$ (f) 2

2.4.3 (a) $\ln(a^3)$ (b) $\ln(ab^2)$ (c) $\ln(a^c/b)$ (d) $\ln(e^c/b^3)$

2.4.4 $f(x) = 10^{(x-1)/2}$, $g(x) = 10^{3-x/2}$ och $h(x) = 10^{x+1}$.

2.4.5 $f(x) = e^{-1/2}x^{1/2}$, $g(x) = e^3x^{-1/2}$ och $h(x) = ex$

2.5.1 (a) $\ln 3/\ln 2$ (b) $x = -1/(2\ln 3) = 1/\ln 9$ (c) $\sqrt{e^2+1}$
(d) Saknar lösning (e) 1

2.5.2 $2^{-40/29}$

2.5.3 $\ln 3$

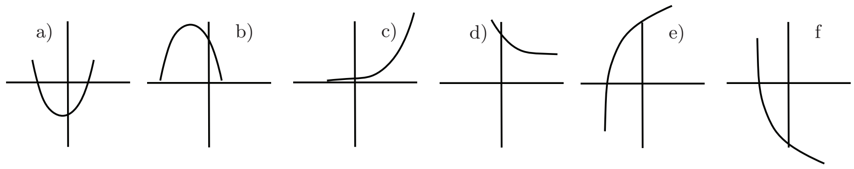
2.5.4 Eftet $20(\ln(155) - \ln(105))/(\ln(155) - \ln(145)) \approx 118$ minuter.

2.5.5 $5\ln(3)/\ln(2)$ timmar.

2.5.6 (a) 10 mg
(b) 82%
(c) $10 \cdot 8,2^6 \approx 3,0$ mg
(d) $-\ln 10/\ln(0,82) \approx 11,6$ timmar.

2.6.1 (a) t^2+2t+2 (b) t^4+6t^2+10 (c) t^4+2t^2+4

2.6.2 (a) $3x^4+1$ (b) $9x^4+6x^2+1$



2.6.3

2.6.4 $\ln\left(\dfrac{(x-1)^2}{x+1}\right)$

2.6.5 (a) $0,3$ (b) -1 (c) $-0,4$ (d) 1

3.3.1 (a) $f'(x)=5x^4+1$, och $f'(2)=81$
(b) $f'(x)=3x^2-3x^{-5/2}/2$ och $f'(2)=12-3\sqrt{2}/16$
(c) $f'(x)=4x^3-12x$ och $f'(2)=8$
(d) $f'(x)=3e^{x+1}$ och $f'(2)=3e^3$
(e) $f'(x)=1/x$ och $f'(2)=1/2$

3.3.2 (a) $y=x-2$ (b) $y=(-3x+16)/25$ (c) $y=x/3+\ln(3/e)$

3.3.3 (a) $f'(x)=12/(x+2)^2$ (b) $e^x(\ln x+1/x)$ (c) $f'(x)=e^{x^2+1}(1+2x^2)$

(c) $f'(x)=2^{-x}(2x-\ln 2\cdot x^2)$ (d) $f'(x)=6x^3/\sqrt{3x^4+7}$

(f) $f'(x)=\dfrac{7}{7x+3}-\dfrac{1}{1-x}$ (g) $f'(x) = 2e^{x^2}\cdot\big(x\ln(2x+7)+1/(2x+7)\big)$

(h) $e^{2x}\big(2(x^3+1)-\frac{3}{2}x^2\big)/\big(x^3+1\big)^{3/2}$ (i) $f'(x)=\Big(2\sqrt{x}\big(e^{-\sqrt{x}}+1\big)\Big)^{-1}$

3.4.1 (a) Växande på $[0,\infty)$ och avtagande på $(-\infty,0]$
(b) Växande på $[-1,0]$ och $[1,\infty)$ och avtagande på $(-\infty,-1]$ och $[0,1]$
(c) Växande på $[1/2,\infty)$ och avtagande på $(-\infty,1/2]$

3.4.2 $f'=b$

3.4.3 (a) $f'(-2,5)\approx-4$ (b) $g'(0,5)\approx 1$ (c) $h'(1)\approx 0$ (d) $k'(-1)\approx 0,25$

3.6.1 (a) Minsta värde: $f(-2)=1$ (även lokalt minimum); inget lokalt maximum
(b) Lokalt minimum: $f-1)=0$, lokalt maximum: $f(1)=4$, inget minst eller störst värde
(c) Minsta värde: $f(\ln 2)=2-2\ln 2$
(d) Minsta värde: $f(1+\sqrt{2})=1+\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})-\ln 2$

4.1 $y'=ky$, för någon konstant k

4.2 $y'=ky(M-y)$, för någon konstant k

4.3 $y'=k/y$, för någon konstant k

4.1.1 (a) $F(x) = x^4/4 + 2x^2 + C$

(b) $F(x) = 2\sqrt{x} + C$

(c) $F(x) = \ln x + e^x + C$

(d) $F(x) = 10^x/\ln x + C$

4.1.2 (a) $F(x) = 2\sqrt{1+x} + C$

(b) $F(x) = e^{3x}/3 + C$

(c) $F(x) = \ln(x+5) + C$

(d) $F(x) = -\frac{2}{3}(1-x)^{3/2} + C$

4.1.3 $F(x) = \dfrac{1}{a-b} \ln \left| \dfrac{x-a}{x-b} \right| + C$

4.2.1 (a) $y = 1 + Ce^{x^2}$, där C är en godtycklig konstant.

(b) $y = Cx^2$, där C är en godtycklig konstant.

(c) $1 + Ce^{-x}$, där C är en godtycklig konstant.

4.2.2 $y = Ce^{kt}$, $f(t) = C \cdot 2^{-t/2}$, $2\ln 10/\ln 2$.

4.2.3 $f(t) = \sqrt{3t+1}$, 2 timmar och 40 minuter.

4.2.4 $f(t) = \dfrac{M}{1 + (M-1)e^{-kMt}}$