MATEMATIK
Göteborgs universitet

Lösningar tillMMGN00 Introduktionskurs i matematik för naturvetare, 1,5 p, 09 09 19.

1. Vi har att $4 = 2^2$ och $8 = 2^3$, så med räkneregler för potenser får vi

$$\frac{2^{-1/35} \cdot 8^{1/7}}{4^{1/5}} = 2^{-1/35} \cdot 2^{3/7} \cdot 2^{-2/5} = 3^{-1/35+3/7-2/5} = 2^0 = 1.$$

Svar: 1.

2. Räkneregler för logaritmer ger

$$\ln 20 + \ln(\frac{5}{4} - 2\ln 5 = \ln 20 + \ln(\frac{5}{4}) - \ln 5^2 = \ln\left(\frac{20 \cdot 5}{4 \cdot 25}\right) = \ln 1 = 0.$$

Svar: 0.

3. Vi vet att $f(x) = kx^a$, för lämpliga värden på k och a. De kända punkterna på grafen ger

$$\begin{cases} \frac{10}{3} &= k \cdot 4^a \\ 5 &= k \cdot 9^a \end{cases}$$

Kvoten mellan den första likheten och den andra ger $2/3 = (4/9)^a = (2/3)^{2a}$, så vi ser att $2a = 1$, dvs $a = 1/2$. Insatt i den andra likheten ger detta $5 = 3k$, så att $k = 5/3$.
Svar: $f(x) = 5x^{1/2}/3$.

4. Vi har att $f'(x) = x^2 - 4x + 3$. Med kvadratkomplettering får vi $f(x) = (x-2)^2 - 1$. Det betyder att grafen är en förskjutning av grafen till x^2 två steg åt höger och ett steg nedåt. Bara d) stämmer med detta.

Svar: d).

5. Tangenten ska gå genom punkten $(1, f(1)) = (1, \ln 2)$. Den har riktningskoefficient $f'(1)$. Vi har att $f'(x) = x/(x^2+1)$, så $f'(1) = 1$.

Detta ger att tangenten har ekvationen $y = x + m$, för något m. Den går genom $(1, \ln 2)$, så $\ln 2 = 1 + m$. Detta ger $m = \ln 2 - 1$.

Svar: $y = x + \ln 2 - 1$.

6. En omskrinving ger $y' = y(x+1)$. Division med y och separering av variabler ger

$$\frac{dy}{y} = (x+1)\,dx,$$

som integreras till

$$\ln|y| = x^2/2 + x + C_1.$$

Exponentiering ger nu att $y = \pm e^{C_1} e^{x^2/2+x} = Ce^{x^2/2+x}$.

Vår funktion är en av dessa. Vi vet att $f(2) = 4$, så vi ska ha $4 = Ce^{4/2+2} = Ce^4$, dvs $C = 4e^{-4}$.

Svar: $f(x) = 4e^{x^2/2+x-4}$