NBAM00 Naturvetenskapligt basår, Matematik del 2, 2017-06-08

1 a) $f(x) = \dfrac{3\cos x}{(2x+1)^4}$ ; $f'(x) = \dfrac{-3\sin x\,(2x+1)^4 - 3\cos x \cdot 4(2x+1)^3 \cdot 2}{(2x+1)^8} =$

$= \dfrac{-3(2x+1)\sin x - 24\cos x}{(2x+1)^5}$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{3x^{2/3}} + e^{2x}\,dx = x^{1/3} + \frac{1}{2}e^{2x} + C$

2) $f(x) = \dfrac{4x+1}{x-3} = -9 \iff 4x+1 = -9(x-3) = 27 - 9x \iff$

$13x = 26 \iff x = 2$. Punkten på kurvan är $(2,-9)$

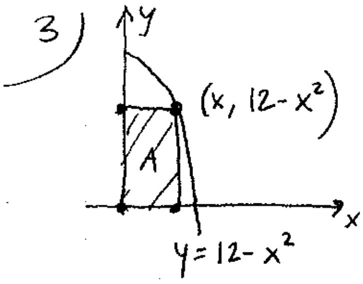
$f'(x) = \dfrac{4(x-3)-(4x+1)}{(x-3)^2} = \dfrac{-13}{(x-3)^2}$ ; $f'(2) = -13$

$\therefore$ Rikt. koeff. för tangenten är $k_T = -13$ och för normalen $k_N = -1/k_T = 1/13$. Ekvationen för tangenten är:

$y+9 = -13(x-2)$, dvs. $y = -13x + 17$

Ekvationen för normalen: $y + 9 = \frac{1}{13}(x-2)$, dvs. $y = \frac{x}{13} - \frac{119}{13}$

3)



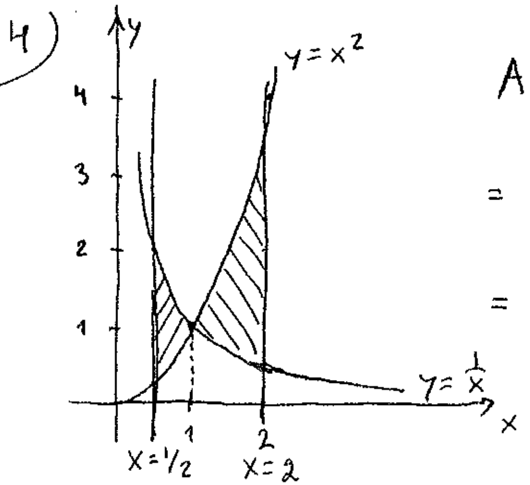

Arean $A(x) = x(12-x^2) = 12x - x^3$

$A'(x) = 12 - 3x^2 = 0 \iff x^2 = 4 \iff x = 2$ ($x>0$)

| | 0 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|
| $A'(x)$ | | + | 0 | − |
| $A(x)$ | | ↗ | | ↘ |

Av teckenschemat framgår att arean har max. i $x=2$, dvs. för den rektangel som har hörn i $(2,8)$, och den maximala arean är $A(2) = 2\cdot 8 = 16$ (a.e.)

4)




$A = \displaystyle\int_{1/2}^{1}\left(\frac{1}{x} - x^2\right)dx + \int_{1}^{2}\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)dx =$

$= \left[\ln x - \frac{x^3}{3}\right]_{1/2}^{1} + \left[\frac{x^3}{3} - \ln x\right]_{1}^{2} =$

$= -\frac{1}{3} - \ln\frac{1}{2} + \frac{1}{8\cdot 3} + \frac{8}{3} - \ln 2 - \frac{1}{3} =$

$= 2 + \frac{1}{24} - (\ln 1 - \ln 2) - \ln 2 = 2 + \frac{1}{24} = \frac{49}{24}$ (ae

5a) $z = 3 - i3\sqrt{3}$; $|z| = \sqrt{9 + 9\cdot 3} = \sqrt{9\cdot 4} = 3\cdot 2 = 6$;

$z = 6\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 6e^{-i\pi/3}$

b) $(3 - i3\sqrt{3})^{69} = \left(6e^{-i\pi/3}\right)^{69} \underset{\text{deMoivre}}{=} 6^{69} e^{-i23\pi} =$

$= 6^{69}\left(\cos(-23\pi) + i\sin(-23\pi)\right) = 6^{69}(-1 + i\cdot 0) = -6^{69}$

6) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 2}$

a) $x^2 - 2 = 0 \iff x = \pm\sqrt{2}$ Alltså $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

$f'(x) = \frac{2x(x^2-2) - x^2\cdot 2x}{(x^2-2)^2} = \frac{-4x}{(x^2-2)^2} = 0 \iff x = 0$

| | | $-\sqrt{2}$ | | $0$ | | $\sqrt{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | ξ | $+$ | $0$ | $-$ | ξ | $-$ |
| $f(x)$ | ↗ | | ↗ | | ↘ | | ↘ |

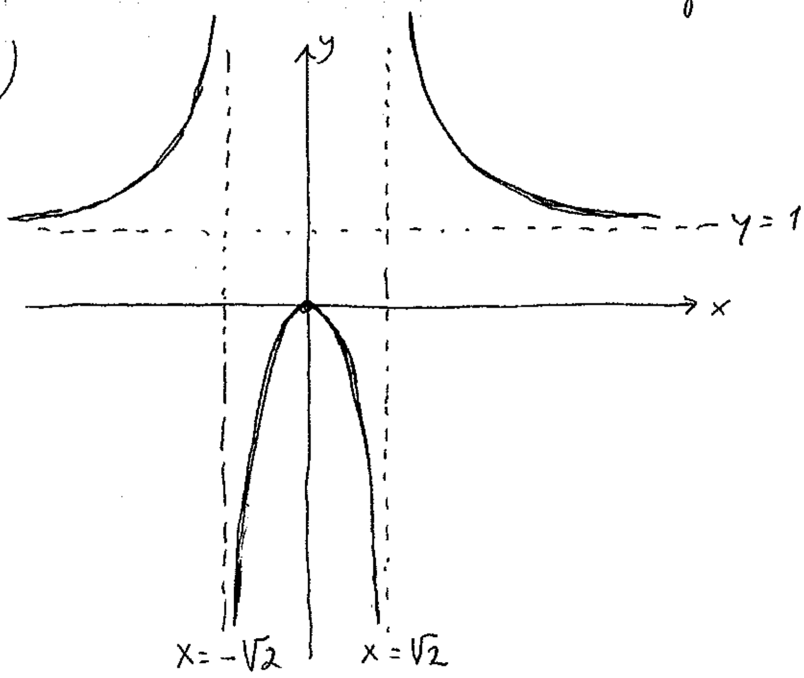
b) $f$ har lokal maximipkt. i $x = 0$

c) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-2} = \frac{x^2}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})} \to \begin{cases} +\infty & \text{då } x \to (-\sqrt{2})^- \\ -\infty & \text{då } x \to (-\sqrt{2})^+ \\ -\infty & \text{då } x \to (\sqrt{2})^- \\ +\infty & \text{då } x \to (\sqrt{2})^+ \end{cases}$

Alltså har $f$ de lodräta asymptoterna $x = \sqrt{2}$ & $x = -\sqrt{2}$.

d) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-2} = \frac{1}{1 - \frac{2}{x^2}} \to 1$ då $x \to \pm\infty$ ∴ $y = 1$ är vågrät as. både då $x \to -\infty$ & $x \to +\infty$

e)



7) $(*)$ $v'(t) + 5v(t) = 10$. Förläng m. integrerande faktor $e^{5t}$

$(*) \Leftrightarrow e^{5t}v'(t) + 5e^{5t}v(t) = 10e^{5t} \Leftrightarrow$

$\frac{d}{dt}\left(v(t)e^{5t}\right) = 10e^{5t} \Leftrightarrow$

$v(t)e^{5t} = 2e^{5t} + C \Leftrightarrow v(t) = 2 + Ce^{-5t}$

$v(0) = 0 \Rightarrow 0 = 2 + C \Rightarrow C = -2$

$\therefore$ Fallhastigheten är $\underline{v(t) = 2 - 2e^{-5t}}$

b) Vi har $v(t) = s'(t)$, där $s(t)$ är sträckan som fågelungen fallit efter $t$ sekunder

$s'(t) = 2 - 2e^{-5t} \Rightarrow s(t) = 2t + \frac{2}{5}e^{-5t} + C$

$s(0) = \frac{2}{5} + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{2}{5}$

$\therefore$ $s(t) = 2t + \frac{2}{5}\left(e^{-5t} - 1\right)$ ger sträckan vid tiden $t$

Efter 4 sekunder har fågelungen fallit

$s(4) = 8 + \frac{2}{5}\left(e^{-20} - 1\right) = \frac{38}{5} + \frac{2}{5}e^{-20}$ (m)

Vi har att $e^{-20} - 1 < 0$ så $s(4) < 8$, samt

$s(4) > \frac{38}{5} = 7 + \frac{3}{5} > 7{,}5$

$s(4)$ kan alltså avrundas till 8 m.