Övningstenta nr 1 NBAM00, del 2

1 a) $f'(x) = \dfrac{(4e^{4x} + 1 + \tan^2 x)\sqrt{x} - (e^{4x} + \tan x)/2\sqrt{x}}{x}$

b) $\int \left(\frac{2}{x\sqrt{x}} + 6\sin 3x\right)dx = \int \left(2x^{-3/2} + 6\sin 3x\right)dx =$

$= 2\,\dfrac{x^{-1/2}}{-1/2} + 6\left(-\dfrac{\cos 3x}{3}\right) + C = -\dfrac{4}{\sqrt{x}} - 2\cos 3x + C$

2) $y = \dfrac{7x-1}{x+2} = f(x)$, $D_f = \{x \in \mathbb{R};\ x \neq -2\}$

$y = 2 \Leftrightarrow \dfrac{7x-1}{x+2} = 2 \underset{(x\neq -2)}{\Leftrightarrow} 7x - 1 = 2x + 4 \Leftrightarrow 5x = 5 \Leftrightarrow x = 1$

$f'(x) = \dfrac{7(x+2) - (7x-1)}{(x+2)^2} = \dfrac{15}{(x+2)^2}$

Riktn.koeff. för sökta tangenten $k_T = f'(1) = \dfrac{15}{(1+2)^2} = \dfrac{15}{9}$

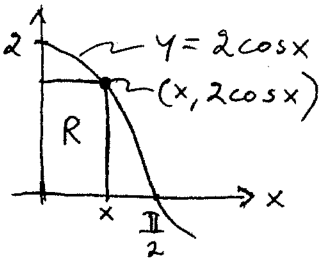
———— " ———— normalen $k_N = -\dfrac{1}{k_T} = -\dfrac{9}{15}$

Tangenten till kurvan i punkten $(1,2)$ har ekvationen

$y - 2 = \frac{15}{9}(x-1)$, dvs. $y = \frac{15}{9}x + \frac{1}{3}$

Normalen till kurvan i $(1,2)$ har ekvationen

$y - 2 = -\frac{9}{15}(x-1)$, dvs. $y = -\frac{9}{15}x + \frac{39}{15}$

3) 

En rektangel R, enl. beskrivningen, med ett hörn på kurvan i $(x, 2\cos x)$ har omkretsen $L(x) = 2x + 2\cdot 2\cos x$.

Vi söker största värde av $L(x) = 2x + 4\cos x$ då $0 \le x \le \pi/2$

Vi har $L'(x) = 2 - 4\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pi/6$

x	0		$\pi/6$		$\pi/2$
$L'(x)$		+	0	−	
$L(x)$		↗		↘	

Av teckenschemat framgår det att L antar sitt max. i $\pi/6$, dvs.

Den största omkretsen är $L\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cdot\frac{\pi}{6} + 4\cos\frac{\pi}{6} =$

$= \dfrac{\pi}{3} + 4\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3} + 2\sqrt{3}$ (l.e.)

4a) $\dfrac{1-3i}{3+i}-\dfrac{2}{i}=\dfrac{(1-3i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}-\dfrac{2(-i)}{i(-i)}=\dfrac{3-i-9i+3i^2}{9+1}+\dfrac{2i}{1}=$

$=\dfrac{-10i}{10}+2i=-i+2i=i$

b) $z^2-(2+4i)z-6=0 \iff (z-(1+2i))^2-(1+2i)^2-6=0 \iff$

$\underline{(z-(1+2i))^2}=6+(1+2i)^2=6+1+4i+4i^2=\underline{3+4i}$

Ansätt $z-(1+2i)=u+iv$. Ekvationen är då

$(u+iv)^2=3+4i \iff u^2-v^2+2uvi=3+4i \iff$

$\begin{cases} u^2-v^2=3 \\ 2uv=4 \end{cases} \iff \begin{cases} u^2-v^2=3 \\ v=2/u \end{cases} \iff \begin{cases} u^2-4/u^2=3 \\ v=2/u \end{cases}$

$u^2-\dfrac{4}{u^2}=3 \iff u^4-4=3u^2 \iff u^4-3u^2-4=0 \iff$

$\left[\text{Sätt } u^2=t\right] \iff t^2-3t-4=0 \iff t=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+4}=\frac{3}{2}\pm\frac{5}{2}$

$\iff t=4$ eller $t=-1$

ORIMLIGT, ty $t=u^2\geq 0$ då u reellt.

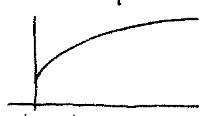
Vi har $t=4=u^2$, dvs. $u=\pm 2$, som ger oss två lösn

$u_1=2,\ v_1=2/u_1=1$ ger $z_1=1+2i+u_1+iv_1=1+2i+2+i=\underline{\underline{3+3i}}$

$u_2=-2,\ v_2=2/u_2=-1$ ger $z_2=1+2i+u_2+iv_2=1+2i-2-i=\underline{\underline{-1+i}}$

5) För $x>0$ är kurvan $y=\frac{4}{x^2}$ avtagande och ser ut ungefär

så här: , medan kurvan $y=2+3\sqrt{x}$ är växande

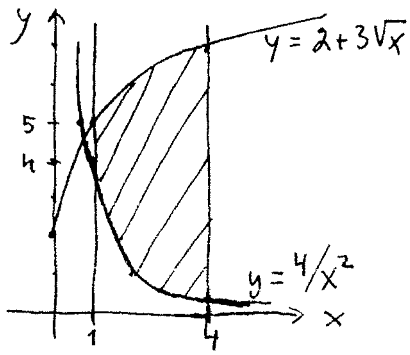
och ser ut ungefär så här: . Kurvorna har

en skärningspunkt, men vi behöver inte beräkna den.

Vi kollar istället värdet för $x=1$: $y=\frac{4}{x^2}=4$ & $y=2+3\sqrt{x}=5$

Alltså ligger kurvan $y=2+3\sqrt{x}$ över kurvan $y=\frac{4}{x^2}$ då

$x\geqslant 1$. Skiss av området:



Den sökta arean är $A=\displaystyle\int_1^4\left(2+3\sqrt{x}-\frac{4}{x^2}\right)dx$

$=\left[2x+\dfrac{3x^{3/2}}{3/2}+\dfrac{4}{x}\right]_1^4=\left[2x+2x\sqrt{x}+\dfrac{4}{x}\right]_1^4=$

$=(8+16+1)-(2+2+4)=\underline{\underline{17}}$ (a.e.)

6) $y' - xy = x$. Integrerande faktor är $e^{-x^2/2}$, vi får

$$y' - xy = x \iff e^{-x^2/2}y' - xye^{-x^2/2} = xe^{-x^2/2} \iff$$

$$\frac{d}{dx}\, e^{-x^2/2}y = xe^{-x^2/2} \iff e^{-x^2/2}y = -e^{-x^2/2} + C \iff$$

$$\underline{y = -1 + Ce^{x^2/2}} \quad \text{allmän lösning}$$

$y(0) = 1$ ger $1 = -1 + Ce^0 = -1 + C$, dvs. $C = 2$ och

$$\underline{y = 2e^{x^2/2} - 1}$$

7) $f(x) = \dfrac{4(x-1)^2}{(2x-1)(x-2)}$; $x \neq \frac{1}{2}$, $x \neq 2$

$$f'(x) = \frac{8(x-1)(2x-1)(x-2) - 4(x-1)^2\left[2(x-2) + (2x-1)\right]}{(2x-1)^2(x-2)^2} =$$

$$= \frac{4(x-1)\left[2(2x-1)(x-2) - (x-1)(4x-5)\right]}{(2x-1)^2(x-2)^2} = \frac{4(x-1)\left[2(2x^2-5x+2) - (4x^2-9x+5)\right]}{(2x-1)^2(x-2)^2}$$

$$= \frac{4(x-1)(-x-1)}{(2x-1)^2(x-2)^2} = \frac{-4(x-1)(x+1)}{(2x-1)^2(x-2)^2}.$$ Teckenschema ger

x		-1		$1/2$		1		2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$\wr$	$+$	0	$-$	$\wr$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	$\wr$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	$\wr$	$\searrow$

Lokalt min. i $x = -1$

$f(-1) = 16/9$

Lok. max. i $x = 1$

$f(1) = 0$

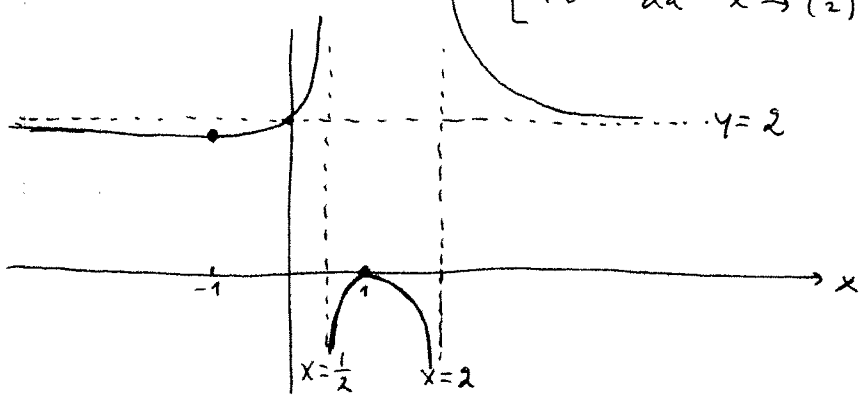
Vi undersöker ev. asymptoter:

$$f(x) = \frac{4(x^2-2x+1)}{2x^2-5x+2} = \frac{4x^2-8x+4}{2x^2-5x+2} = \frac{4 - 8/x + 4/x^2}{2 - 5/x + 2/x^2} \to 2 \text{ då } x \to \begin{cases} \infty \\ -\infty \end{cases}$$

$y = 2$ är alltså vågrät asymptot både då $x \to \infty$ och då $x \to -\infty$

Dessutom har vi lodräta asymptoter i $x = \frac{1}{2}$ och $x = 2$, ty

$$f(x) = \frac{4(x-1)^2}{(2x-1)(x-2)} \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{då } x \to 2^+ \\ -\infty & \text{då } x \to 2^- \\ -\infty & \text{då } x \to (\frac{1}{2})^+ \\ +\infty & \text{då } x \to (\frac{1}{2})^- \end{cases}$$



$f(0) = 2$