1 Lösningar till tenta NBAM00-1, 18/10 8.30-12.30

1. Förenkla med hjälp av potenslagarna

   a $(st^2u^{-1})^4(st^{-1}u^2)^2(-st)^{-6}$

   b $\sqrt[4]{a^3\sqrt{a^2\sqrt{b}}}$. (6p)

   Lösning: a.

$$(st^2u^{-1})^4(st^{-1}u^2)^2(-st)^{-6} = s^4t^8u^{-4}s^2t^{-2}u^4s^{-6}t^{-6} = s^0t^0u^0 = 1.$$

   b.

$$\sqrt[4]{a^3\sqrt{a^2\sqrt{b}}} = ((a^2b^{1/2})^{1/2}a^3)^{1/4} = ab^{1/4}a^3)^{1/4} = ab^{1/16}.$$

2. Lös ekvationen $\ln\frac{3x}{5} + \ln(4x) = 2\ln 2 - 1$.

   (5p)

   Lösning:

$$\ln\frac{3x}{5} + \ln(4x) = 2\ln 2 - 1 = 0,$$

$$\ln(3/5) + \ln x + \ln 4 + \ln x = \ln 2^2 - 1,$$

$$2\ln x = -\ln(3/5) - 1 = \ln(5/3) - 1,$$

$$\ln x = (1/2)\ln(5/3) - 1/2 = \ln\sqrt{5/3} - 1/2,$$

$$x = \sqrt{5/3}e^{-1/2}.$$

3. Låt T vara en (likbent) triangel med sidlängderna 3, 3 och 5.

   a. Beräkna arean av T.

   b. Beräkna alla vinklarna i T (svara med arcus-uttryck).

   (6p)

   Lösning:

   a. Dra höjden mot sidan med längd 5. Eftersom triangeln är likbent delar den basen (sidan med längd 5) i två lika delar med längd $5/2$. Pythagoras sats ger att höjden har längd $h = \sqrt{3^2 - (5/2)^2} = \sqrt{36/4 - 25/4} = \sqrt{11}/2$. Arean blir därför $(5\sqrt{11})/4$ (basen gånger höjden genom 2).

   b. Om α är en av de lika vinklarna blir $3\sin\alpha = h$. Alltså blir $\alpha = \arcsin(h/3) = \arcsin(\sqrt{11}/6)$. (Alternativet $180° - \arcsin(\sqrt{11}/6)$ är omöjligt eftersom de två lika vinklarna inte kan vara större än $90°$.) Den återstående vinkeln blir $180° - 2\arcsin(\sqrt{11}/6)$ (vinkelsumman i triangeln är $180°$).

4. Visa att punkterna $A = (2,1,1)$, $B = (2,-1,0)$ och $C = (1,0,0)$ bildar hörn i en rätvinklig triangel och beräkna triangelns area.

   (6p)

   Lösning: $\vec{AB} = B - A = (0,2,-1)$, $\vec{AC} = (-1,-1,-1)$ och $\vec{BC} = ((-1,1,0)$. Skalärprodukten

$$\vec{AC}\cdot\vec{BC} = (-1)(-1) + (-1)1 + (-1)0 = 0.$$

   Därför är $\vec{AC}$ vinkelrät mot $\vec{BC}$. Längden av AC är $\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{3}$ och längden av BC är $\sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$. Därför är arean av $T = \sqrt{2}\sqrt{3}/2 = \sqrt{6}/2$.

5. Mängden av ett radioaktivt preparat vid tiden t är $f(t) = me^{-kt}$ där $m > 0$ och k är givna tal. Vid tiden $t = 5$ är mängden $f(t) = m/2$.

   a. Vad är k? (Du får svara med logaritmutryck.)

   b. Hur mycket av preparatet återstår vid tiden $t = 10$? (Ge svaret på så enkel form som möjligt.)

   (7p)

Lösning: a.

$$me^{-5k} = m/2$$

$$-5k = \ln(1/2), k = (1/5)(-\ln(1/2)) = (1/5)\ln 2.$$

b. $f(10) = me^{-(10\ln 2)/5} = me^{-2\ln 2} = me^{-\ln 4} = m/4$. (Eller: $me^{-10k} = m(e^{-5k})^2 = m(1/2)^2 = m/4$.)

6. Linjen L har ekvationen $3x + 4y - 13 = 0$. Punkten P har koordinaterna $(2, 3)$ (i ett standardkoordinatsystem).

   a. Bestäm ekvationen för en linje L_2 genom P som är vinkelrät mot linjen L.

   b. Beräkna koordinaterna för skärningspunkten mellan L och L_2.

   c. Beräkna avståndet från P till linjen L.

(8p)

Lösning: L:s ekvation kan skrivas på normalform $y = -(3/4)x + 13/4$. L har alltså riktningskoefficient $k = -3/4$. Om L_2 har riktningskoefficienten k_2 gäller $kk_2 = -1$, så $k_2 = 4/3$. Enpunktsformeln ger att L_2:s ekvation blir

$$y - 3 = (4/3)(x - 2), y = (4/3)x + 1/3.$$

I skärningspunkten $Q = (x, y)$ mellan L och L_2 gäller

$$(4/3)x + 1/3 = -(3/4)x + 13/4, x(4/3 + 3/4) = 13/4 - 1/3 = 39/12 - 4/12 = 35/12.$$

Alltså får vi

$$x(16 + 9)/12 = 35/12, x = 35/25 = 7/5.$$

Insättning i L:s ekvation (eller L_2:s) ger att $y = 11/5$. Avståndet från P till linjen är avståndet från P till Q, $\sqrt{(2 - 7/5)^2 + (3 - 11/5)^2} = \sqrt{(9 + 16)/25} = 1$.

7. a. Bestäm en heltalslösning till ekvationen $x^3 + 2x^2 - 11x + 6 = 0$.

   b. Bestäm alla lösningar till ekvationen.

(8p)

Lösning: En heltalslösning x måste dela 6, så $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ eller ± 6. Det visar sig att $x = 2$ duger. Enligt faktorsatsen är $p(x) = x^3 + 2x^2 - 11x + 6$ delbart med $x - 2$. Polynomdivision ger att

$$p(x) = (x - 2)(x^2 + 4x - 3).$$

Om $p(x) = 0$ måste antingen $x - 2 = 0$ eller $x^2 + 4x - 3 = 0$. Andragradsekvationen har lösningarna

$$x = -4/2 \pm \sqrt{(-4/2)^2 + 3} = -2 \pm \sqrt{7}.$$

Lösningarna till den ursprungliga ekvationen blir alltså

$$x = 2, x = -2 + \sqrt{7}, x = -2 - \sqrt{7}.$$

8. Bestäm c så att polynomet $x^{100} + x^2 - c$ är jämnt delbart med $(x - 1)$.

(4p)

Enligt faktorsatsen är $p(x)$ är delbart med $(x - 1)$ precis då $p(1) = 0$. Med $p(x) = x^{100} + x^2 - c$ får vi $p(1) = 1 + 1 - c$, så $x^{100} + x^2 - c$ är delbart med $(x - 1)$ om och endast om $c = 2$.