NBAM00: Naturvetenskapligt basår – Matematik, del 1

Uppgift 1 (m.h.a. vektorer). Man bildar vektorer $\overrightarrow{AB} = (3, -3)$, $\overrightarrow{AC} = (7, 1)$ och $\overrightarrow{BC} = (4, 4)$.
(a) Sidolängderna är ju vektorernas längder:

- $|AB| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ l.e.
- $|BC| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ l.e.
- $|AC| = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ l.e.

(b) Vinklarna kan bestämmas m.h.a. skalärprodukten:

- $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|} = \frac{3\cdot 7+(-3)\cdot 1}{3\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$. Således är $\alpha = \arccos(3/5)$.
- $\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\,|\overrightarrow{BC}|} = \frac{(-3)\cdot 4+3\cdot 4}{3\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}} = \frac{0}{24} = 0$. Således är $\beta = 90^\circ$.
- $\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CB}|\,|\overrightarrow{CA}|} = \frac{(-4)\cdot(-7)+(-4)\cdot(-1)}{4\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}} = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}$. Således är $\gamma = \arccos(4/5)$.

(c) $\triangle ABC$ är rätvinklig med kateterna $3\sqrt{2}$ l.e. och $4\sqrt{2}$ l.e. Arean $= \frac{1}{2}3\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2} = \frac{24}{2} = 12$ a.e.

Uppgift 1 (utan vektorer). (a) Sidolängderna bestäms m.h.a. avståndsformeln:

- $a = |BC| = \sqrt{(8-4)^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ l.e.
- $b = |AC| = \sqrt{(8-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ l.e.
- $c = |AB| = \sqrt{(4-1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ l.e.

(b) Vinklarna bestäms m.h.a. cosinussatsen:

- $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ blir alltså $32 = 50+18-60\cos\alpha$ därifrån man får att $\cos\alpha = \frac{-36}{-60} = \frac{3}{5}$. Då är $\alpha = \arccos\frac{3}{5}$.
- $b^2 = a^2+c^2-2ac\cos\beta$ blir alltså $50 = 32+18-48\cos\beta$ därifrån man får att $\cos\beta = \frac{0}{-48} = 0$. Då är $\beta = 90^\circ$.
- $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma$ blir alltså $18 = 32+50-80\cos\gamma$ därifrån man får att $\cos\gamma = \frac{-64}{-80} = \frac{4}{5}$. Då är $\gamma = \arccos\frac{4}{5}$.

(c) Areasatsen ger: $A = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}\sqrt{32}\cdot\sqrt{18}\cdot\sin 90^\circ = \frac{1}{2}\cdot 24\cdot 1 = 12$ a.e.

Uppgift 2 (Substitutionsmetoden)**.** Från första ekvationen får man att $z = 2x - 5$. Detta sätts in i 2:a ekvationen och därifrån löser man ut y.

$$2x + y + 3(2x - 5) = 6 \Leftrightarrow 8x + y = 21 \Leftrightarrow y = 21 - 8x.$$

Nu sätter man $z = 2x - 5$ och $y = 21 - 8x$ in i 3:e ekvationen och löser ut x:

$$3x + (21 - 8x) - (2x - 5) = 5 \Leftrightarrow -7x + 26 = 5 \Leftrightarrow -7x = -21 \Leftrightarrow x = 3.$$

När man tagit reda på x:et, så kan man beräkna y och z:

$$y = 21 - 8 \cdot 3 = 21 - 24 = -3, \qquad z = 2 \cdot 3 - 5 = 6 - 5 = 1.$$

Ekvationssystemet löses av $x = 3, y = -3$ och $z = 1$.

Uppgift 2 (Eliminationsmetoden)**.**

$$\begin{array}{rrrll} 2x & & -z & = 5 & -\ \ - \\ 2x & +y & +3z & = 6 & \leftarrow \\ 3x & +y & -z & = 5 & \leftarrow \end{array} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{array}{rrrll} 2x & & -z & = 5 & \leftarrow \\ & y & +4z & = 1 & \\ x & +y & & = 0 & -2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{array}{rrrll} & -2y & -z & = 5 & \leftarrow \\ & y & +4z & = 1 & 2 \\ x & +y & & = 0 & \end{array} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{array}{rrrll} & & 7z & = 7 & \mid \div 7 \ \ -4 \\ & y & +4z & = 1 & \leftarrow \\ x & +y & & = 0 & \end{array}$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{array}{rrrll} & & z & = 1 & \\ & y & & = -3 & - \\ x & +y & & = 0 & \leftarrow \end{array} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{array}{rrrl} & & z & = 1 \\ & y & & = -3 \\ x & & & = 3 \end{array}$$

Ekvationssystemet löses av $x = 3, y = -3$ och $z = 1$.

Uppgift 2 (Eliminationsmetoden 2)**.** Omordna ekvationerna och sedan eliminera.

$$\begin{array}{rrrll} y & +2x & +3z & = 6 & - \\ y & +3x & -z & = 5 & \leftarrow \\ & 2x & -z & = 5 & \end{array} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{array}{rrrll} y & +2x & +3z & = 6 & \\ & x & -4z & = -1 & -2 \\ & 2x & -z & = 5 & \leftarrow \end{array}$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{array}{rrrll} y & +2x & +3z & = 6 & \leftarrow \\ & x & -4z & = -1 & \leftarrow \\ & & 7z & = 7 & \mid \div 7 \ \ 4 \ \ -3 \end{array} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{array}{rrrll} y & +2x & & = 3 & \leftarrow \\ & x & & = 3 & -2 \\ & & z & = 1 & \end{array} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{array}{rl} y & = -3 \\ x & = 3 \\ z & = 1 \end{array}$$

Ekvationssystemet löses av $x = 3, y = -3$ och $z = 1$.

Uppgift 3. (a) Enligt satsen om heltalsrötter är någon av delarna till 9 en lösning till ekvationen. Det är alltså $x = \pm 1$, ± 3 och ± 9 som ska prövas:

- $x = 1$ ger $9 + 9 \cdot 1 - 4 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1^3 = 9 + 9 - 4 - 4 = 10 \neq 0$. $x = 1$ är ingen rot!
- $x = -1$ ger $9 + 9 \cdot (-1) - 4 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1)^3 = 9 - 9 - 4 + 4 = 0$. En rot har hittats!
- Struntar i $x = \pm 3$ och $x = \pm 9$.

Ty $x = -1$ är en rot är polynomet $9 + 9x - 4x^2 - 4x^3$ delbart med $(x + 1)$ enligt faktorsatsen. Efter att man utfört polynomdivision, så ser man att

$$9 + 9x - 4x^2 - 4x^3 = (x + 1)(9 - 4x^2).$$

Konjugatregeln ger att

$$9 - 4x^2 = 3^2 - (2x)^2 = (3 + 2x)(3 - 2x).$$

Nu har man faktoruppdelat vänsterledet av den ursprungliga ekvationen

$$9 + 9x - 4x^2 - 4x^3 = (x + 1)(3 + 2x)(3 - 2x) \quad \text{och detta ska vara lika med noll.}$$

En produkt är lika med noll om och endast om någon av dess faktorer är lika med noll. Då får vi tre rötter: $x = -1$, $x = -3/2$ samt $x = 3/2$.

(b) Man får gärna utnyttja faktoruppdelningen från (a):

$$9 + 9x - 4x^2 - 4x^3 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x + 1)(3 + 2x)(3 - 2x) \geq 0.$$

Man sammanställer en teckentabell:

x		$-3/2$		-1		$3/2$	
$x + 1$	-	-	-	0	+	+	+
$3 + 2x$	-	0	+	+	+	+	+
$3 - 2x$	+	+	+	+	+	0	-
$(x + 1)(3 + 2x)(3 - 2x)$	+	0	-	0	+	0	-

Från teckentabellen läser man av att VL ≥ 0 då $x \leq -3/2$ eller $-1 \leq x \leq 3/2$.

OBS: Det är ett **grovt fel** att utnyttja rötterna som funnits i (a) för att göra faktoruppdelningen

$$9 + 9x - 4x^2 - 4x^3 = (x + 1)(x + \tfrac{3}{2})(x - \tfrac{3}{2})$$

eftersom man då tappat bort den negativa faktorn -4 som stått framför x^3. Å andra sidan går det alltså bra att faktoruppdela polynomet med hjälp av dess rötter på följande sätt:

$$9 + 9x - 4x^2 - 4x^3 = -4(x + 1)(x + \tfrac{3}{2})(x - \tfrac{3}{2}).$$

I teckentabellen måste man då ta hänsyn till den negativa faktorn -4 (eller så dela hela olikheten med -4 och vända på olikhetstecknet.)

Uppgift 4. Enligt faktorsatsen kan man faktoruppdela $z^2 - az + b = (z - z_1)(z - z_2)$. Utveckla högerledet och samla ihop termerna med lika exponent:

$$(z - z_1)(z - z_2) = z^2 - zz_1 - zz_2 + z_1z_2 = z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1z_2.$$

Man har alltså fått fram identiteten

$$z^2 - az + b = z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1z_2.$$

När man jämför koefficienterna vid motsvarande potenser av z, får man följande likheter:

$$\begin{aligned} z^2 : &\quad 1 = 1 \\ z^1 : &\quad -a = -(z_1 + z_2) \\ z^0 : &\quad b = z_1z_2 \end{aligned}$$

Alltså, $a = z_1 + z_2$ och $b = z_1z_2$. V.S.B.

Uppgift 5.

(a) $$\frac{\sqrt[8]{4^2 \sqrt[8]{t^{74}}}}{\sqrt[16]{16^{18} \sqrt[4]{t^{10}}}} = \frac{4^{2/8} \cdot |t|^{(74/8)/8}}{16^{18/16}|t|^{(10/4)/16}} = \frac{16^{1/8}|t|^{74/64}}{16^{9/8}|t|^{10/64}} = 16^{\frac{1}{8}-\frac{9}{8}}|t|^{\frac{37}{32}-\frac{5}{32}} = 16^{-\frac{8}{8}}|t|^{\frac{32}{32}} = \frac{|t|}{16}.$$

(b) $$2\lg 5 - \lg 10 + \lg 1 + \frac{\ln 4}{\ln 10} = \lg(5^2) - \lg 10 + \lg 1 + \lg 4 = \lg\left(\frac{25 \cdot 1 \cdot 4}{10}\right) = \lg\left(\frac{100}{10}\right) = \lg 10 = 1.$$

Uppgift 6. (a) Man ska hitta skärningspunkterna av hyperbeln och linjen medan talet m ska väljas sådant att det endast finns en skärningspunkt (=tangeringspunkt). Sätt in $y = m - 4x$ i hyperbelns ekvation:

$$x(m - 4x) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 - mx + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - \frac{m}{4}x + 1 = 0.$$

En andragradsekvation har precis en lösning om diskriminanten (d.v.s. det tal som står under rottecknet i pq formeln) är lika med noll.

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{m^2}{64} - 1 \quad \text{ska vara lika med noll.}$$

Ekvationen $m^2/64 - 1 = 0$ löses av $m = \pm 8$. Det finns två möjliga värden på m så det finns två olika linjer (av den önskade ekvationen) som tangerar hyperbeln, nämligen

$$y = 8 - 4x \qquad \text{och} \qquad y = -8 - 4x.$$

(b) Man sätter $m = 8$ och hittar skärningspunkten precis som i början ovan:

$$x(8 - 4x) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 - 8x + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 1)^2 = 0.$$

Således $x = 1$ och $y = 8 - 4 \cdot 1 = 4$. Om $m = 8$, så har tangeringspunkten koordinaterna $(1, 4)$.

Sedan sätter man $m = -8$ och hittar skärningspunkten:

$$x(-8 - 4x) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 + 8x + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x + 1)^2 = 0.$$

Således $x = -1$ och $y = -8 - 4 \cdot (-1) = -4$. Om $m = -8$, så är $(-1, -4)$ tangeringspunkten.

Uppgift 7. (a) Additionsformeln ger

$$\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

(b) Omvandla radianer till grader:

$$\frac{17}{12}\pi = \pi + \frac{5}{12}\pi = 180^\circ + \frac{5}{12}\pi \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 180^\circ + 5 \cdot \frac{180^\circ}{12} = 180^\circ + 5 \cdot 15^\circ = 180^\circ + 75^\circ = 255^\circ.$$

Det framgår från enhetscirkeln att vinkeln ligger i 3:e kvadranten och då kan man bestämma att $\cos 255^\circ = \cos(180^\circ + 75^\circ) = -\cos 75^\circ$. Således behöver man räkna ut $\cos 75^\circ$.

$$\cos 75^\circ = \cos(30^\circ + 45^\circ) = \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Man har alltså fått att

$$\cos \frac{17}{12}\pi = \cos 255^\circ = -\cos 75^\circ = -\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}.$$

Uppgift 7 (Alternativ lösning till (b) m.h.a. trig-ettan)**.** Som ovan får man att $\cos \frac{17}{12}\pi = -\cos 75^\circ$. Sedan används den trigonometriska ettan för att räkna ut $\cos 75^\circ$:

$$\begin{aligned}\cos 75^\circ &= \sqrt{1 - \sin^2 75^\circ} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{2 + 2\sqrt{2 \cdot 6} + 6}{16}} = \sqrt{\frac{16}{16} - \frac{8 + 4\sqrt{3}}{16}} \\ &= \sqrt{\frac{16 - 8 - 4\sqrt{3}}{16}} = \sqrt{\frac{8 - 4\sqrt{3}}{16}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}.\end{aligned}$$

Således är

$$\cos \frac{17}{12}\pi = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}.$$

Uppgift 8.

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{3x + 1} - \sqrt{x + 1}}{\sin 2x} \cdot \frac{\sqrt{3x + 1} + \sqrt{x + 1}}{\sqrt{3x + 1} + \sqrt{x + 1}} = \Big/ \text{konjugatregeln} \Big/ \\ &= \frac{(3x + 1) - (x + 1)}{\sin 2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{3x + 1} + \sqrt{x + 1}} \\ &= \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{3x + 1} + \sqrt{x + 1}} = \frac{1}{\frac{\sin 2x}{2x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3x + 1} + \sqrt{x + 1}}.\end{aligned}$$

Då blir gränsvärdet

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{3x + 1} - \sqrt{x + 1}}{\sin 2x} &= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\frac{\sin 2x}{2x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3x + 1} + \sqrt{x + 1}} \right) \\ &= \frac{1}{\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x}} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{3x + 1} + \sqrt{x + 1}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 0 + 1} + \sqrt{0 + 1}} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

där standardgränsvärdet "$\frac{\sin z}{z} \to 1$ då $z \to 0$" använts med $z = 2x$.