NBAM00: Naturvetenskapligt basår – Matematik, del 1

Uppgift 1 (utan trigonometri). Man räknar ut längden av en vektor m.h.a. skalärprodukten och utnyttjar skalärproduktens räknelagar:

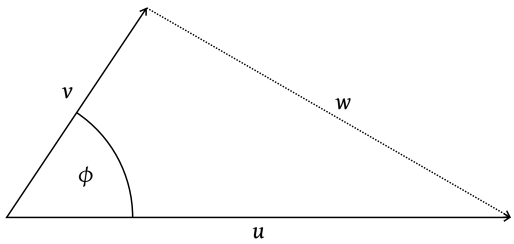
$$\begin{aligned}||\vec{u}-\vec{v}||^2 &= (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||^2 - 2(\vec{u}\cdot\vec{v}) + ||\vec{v}||^2 \\ &= 6^2 - 2\cdot 10 + 3^2 = 36 - 20 + 9 = 25.\end{aligned}$$

Svar: $||\vec{u}-\vec{v}|| = 5$ l.e.

Uppgift 1 (med trigonometri). Antag att vinkeln mellan vektorerna $\vec{u}$ och $\vec{v}$ betecknas med ϕ. Då kan man beräkna

$$\cos\phi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||} = \frac{10}{6\cdot 3} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}\,.$$

Sätt $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$. Antag också att u, v och w betecknar längder av respektive vektorerna. Enligt geometrisk tolkning av vektorsubtraktion kan man skapa en triangel vars sidlängder är u, v och w, där vinkeln ϕ står emot sidan w, se figuren nedan.



Längden av w can beräknas m.h.a. cosinussatsen:

$$w^2 = u^2 + v^2 - 2uv\cos\phi = 6^2 + 3^2 - 2\cdot 6\cdot 3\cdot\frac{5}{9} = 36 + 9 - 20 = 25.$$

Således är $w = 5$ l.e.
Svar: $||\vec{u}-\vec{v}|| = 5$ l.e.

Uppgift 2. Triangelns hörn, sidor och vinklar betecknas som på formelbladet med $a = 2$ cm, $b = 3$ cm och $c = 4$ cm.

(a) Vinklarna bestäms via cosinussatsen:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \quad &\Rightarrow\quad 16 = 4 + 9 - 2\cdot 2\cdot 3\cos\gamma \quad &\Rightarrow\quad \cos\gamma = \frac{-1}{4}\,, \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \quad &\Rightarrow\quad 4 = 9 + 16 - 2\cdot 3\cdot 4\cos\alpha \quad &\Rightarrow\quad \cos\alpha = \frac{7}{8}\,, \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta \quad &\Rightarrow\quad 9 = 16 + 4 - 2\cdot 4\cdot 2\cos\beta \quad &\Rightarrow\quad \cos\beta = \frac{11}{16}\,. \end{aligned}$$

Svar: $\alpha = \arccos\left(\frac{7}{8}\right)$, $\beta = \arccos\left(\frac{11}{16}\right)$ och $\gamma = \arccos\left(\frac{-1}{4}\right)$.

(b) Eftersom $\cos\gamma$ är negativt, ligger vinkeln γ i 2:a kvadranten på enhetscirkeln. Med andra ord är γ trubbig.
Svar: Triangeln är trubbvinklig.

(c) Det är vinkeln γ som står mot sidan c. Värdet av $\sin\gamma$ bestäms m.h.a. trig:ettan:

$$\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin^2\gamma + \left(\frac{-1}{4}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin^2\gamma = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

Eftersom γ ligger i 2:a kvadranten, är $\sin\gamma$ positivt.
Svar: $\sin\gamma = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

(d) Areasatsen används:

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}2\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{3\sqrt{15}}{4}\text{ a.e.}$$

Svar: Triangelns area är $\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$ a.e.

Uppgift 3. (a) Enligt satsen om heltalsrötter är någon av delarna till 3 en lösning till ekvationen. Det är alltså $x = \pm 1$ och ± 3 som ska prövas:

- $x = 1$ ger $4\cdot 1^3 - 8\cdot 1^2 + 1 + 3 = 4 - 8 + 1 + 3 = 0$. En rot har hittats!
- Struntar i $x = -1$ och $x = \pm 3$.

Ty $x = 1$ är en rot, är polynomet $4x^3 - 8x^2 + x + 3$ delbart med $(x-1)$ enligt faktorsatsen. Efter att man utfört polynomdivision, så ser man att

$$4x^3 - 8x^2 + x + 3 = (x-1)(4x^2 - 4x - 3).$$

Man behöver alltså hitta rötter till polynomet $4x^2 - 4x - 3$. Ekvationen $x^2 - x - \frac{3}{4} = 0$ löses (enligt pq-formeln) av:

$$x_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \pm 1.$$

Totalt har tre lösningar funnits och så är man klar.
Svar: Ekvationen löses av $x = 1$, $x = \frac{3}{2}$ och $x = \frac{-1}{2}$.

(b) Man flyttar över allt till ena ledet och faktoruppdelar täljaren och nämnaren:

$$\frac{2}{4-2x} \geq \frac{1}{1-x} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2}{4-2x} - \frac{1}{1-x} \geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2(1-x)-(4-2x)}{(4-2x)(1-x)} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow\quad \frac{-2}{2(2-x)(1-x)} \geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{-1}{(2-x)(1-x)} \geq 0$$

Det finns alltså två nollställen, $x = 1$ samt $x = 2$. Man sammanställer en teckentabell:

x		1		2	
-1	-	-	-	-	-
$1-x$	+	0	-	-	-
$2-x$	+	+	+	0	-
$\frac{-1}{(1-x)(2-x)}$	-	$\nexists$	+	$\nexists$	-

Från teckentabellen läser man av att $\frac{-1}{(1-x)(2-x)} \geq 0$ då $1 < x < 2$.
Svar: Den givna olikheten $\dfrac{2}{4-2x} \geq \dfrac{1}{1-x}$ löses av $x \in (1,2)$.

OBS: Det är ett **grovt fel** att korsmultiplicera utan att tänka på huruvida olikhetstecknet behöver vändas. I den här uppgiften skulle korsmultiplikation ge olikheten $2 \geq 4$, vilket aldrig är uppfyllt, vilket skulle innebära att det inte finns några lösningar till olikheten, vilket är helt fel.

Uppgift 4. (a) Enligt areasatsen är

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ca\sin\beta && \Big/ \cdot 2 \\
\Leftrightarrow \quad & ab\sin\gamma = bc\sin\alpha = ca\sin\beta && \Big/ \div(abc) \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{ab\sin\gamma}{abc} = \frac{bc\sin\alpha}{abc} = \frac{ca\sin\beta}{abc} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} && \text{V.S.B.}
\end{aligned}
$$

(b) Areasatsen ger att $A = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$. Man behöver på något sätt ersätta b med ett uttryck som innehåler c. Enligt sinussatsen med b och c är

$$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{c\sin\beta}{\sin\gamma} = b.$$

Detta sätts in i formeln för arean

$$A = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{c\sin\beta}{\sin\gamma} \cdot c\sin\alpha = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma}. \qquad \text{V.S.B.}$$

Uppgift 5. (a) Primtalsfaktorisera de olika faktorerna i bråket: $10 = 2 \cdot 5$, $6 = 2 \cdot 3$, $15 = 3 \cdot 5$, $20 = 2^2 \cdot 5$. Dessa används för att förenkla bråket m.h.a. potenslagarna:

$$\frac{10^{30} \cdot 6^{17}}{15^{16} \cdot 20^{14} \cdot 2^{20}} = \frac{(2^{30} \cdot 5^{30}) \cdot (2^{17} \cdot 3^{17})}{(3^{16} \cdot 5^{16}) \cdot (2^{28} \cdot 5^{14}) \cdot 2^{20}} = 2^{30+17-28-20} \cdot 3^{17-16} \cdot 5^{30-16-14} = 2^{-1} \cdot 3^1 \cdot 5^0 = \frac{3}{2}.$$

Svar: $\frac{3}{2}$.

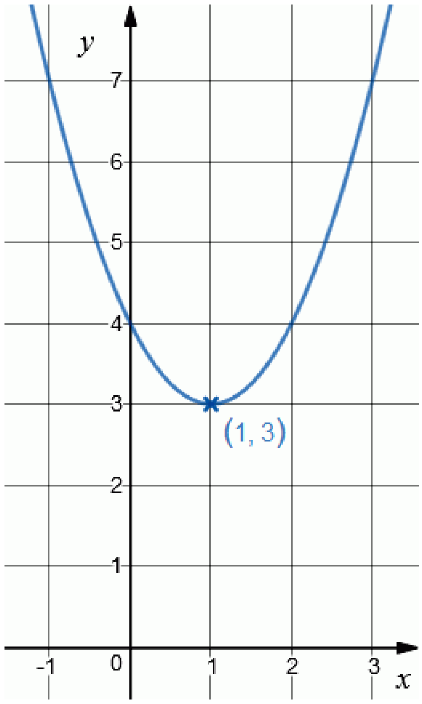
(b) Enligt logaritmlagarna är

$$\ln 16 + \ln e^5 - 3\ln 4 + \frac{\lg 4}{\lg e} + 5 = \ln 4^2 + 5 - 3\ln 4 + \ln 4 + 5 = 2\ln 4 - 2\ln 4 + 10 = 10\,.$$

Svar: 10.

Uppgift 6. (a) Kvadratkomplettering ger $y = x^2 - 2x + 4 = (x^2 - 2x + 1) - 1 + 4 = (x - 1)^2 + 3$. Det är alltså en parabel eftersom endast en av variablerna står i kvadraten.

(b) Enligt ekvationen $y = (x - 1)^2 + 3$ har parabeln sin vertex i punkten $(1, 3)$. Det är variabeln x som blir kvadrerad, varför parabeln har en lodrät symmetriaxel. Det står inget minustecken framför kvadraten, varför vertexen är parabelns lägsta punkt.



(c) Om linjen går igenom origo, så måste dess ekvation vara uppfylld då $x = 0$ och $y = 0$. Insättning av dessa värden i ekvationen $y = kx + m$ ger:

$$0 = k \cdot 0 + m.$$

Svar: $m = 0$.

(d) Enligt (c) är $m = 0$. Det kvarstår att bestämma k. Man ska hitta skärningspunkterna av parabeln och linjen medan talet k ska väljas sådant att det endast finns en skärningspunkt (=tangeringspunkt). Sätt in $y = kx$ (inget m då $m = 0$) i parabelns ekvation:

$$kx = x^2 - 2x + 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - (2 + k)x + 4 = 0.$$

En andragradsekvation har precis en lösning om diskriminanten (d.v.s. det tal som står under rottecknet i pq formeln) är lika med noll.

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{4 + 4k + k^2}{4} - 4 \quad \text{ska vara lika med noll.}$$

Ekvationen $k^2/4 + k - 3 = 0$ löses av $k_{1,2} = -2 \pm 4$, alltså 2 eller -6. Det finns två möjliga värden på k, så det finns två olika linjer som går igenom origo och tangerar hyperbeln, nämligen

$$y = 2x \qquad \text{och} \qquad y = -6x.$$

Svar: $k = 2$ eller $k = -6$, medan $m = 0$ i båda fallen.

Uppgift 7. Dubbla vinkelns formel ger att $\sin 2v = 2\sin v \cos v$. Därför

$$\sin 2v = \cos v \quad\Leftrightarrow\quad 2\sin v\cos v = \cos v \quad\Leftrightarrow\quad 2\sin v\cos v - \cos v = 0$$
$$\Leftrightarrow\quad 2\cos v\left(\sin v - \tfrac{1}{2}\right) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\cos v = 0 & \text{eller}\\ \sin v = \frac{1}{2}\end{cases}$$

Eftersom v ska ligga i den (slutna) 2:a kvadranten, så $\cos v = 0$ löses av $v = \frac{\pi}{2}$, medan $\sin v = \frac{1}{2}$ löses av $v = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$.
Svar: $v = \frac{\pi}{2}$ eller $v = \frac{5}{6}\pi$.

Uppgift 8.

$$\frac{\sin(x^2)}{\sqrt{2x^2+4}-\sqrt{x^2+4}}\cdot\frac{\sqrt{2x^2+4}+\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{2x^2+4}+\sqrt{x^2+4}} = \Big/\text{konjugatregeln}\Big/$$
$$= \frac{\sin(x^2)}{(2x^2+4)-(x^2+4)}\cdot\left(\sqrt{2x^2+4}+\sqrt{x^2+4}\right) = \frac{\sin(x^2)}{x^2}\cdot\left(\sqrt{2x^2+4}+\sqrt{x^2+4}\right).$$

Då blir gränsvärdet

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{\sqrt{2x^2+4}-\sqrt{x^2+4}} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x^2)}{x^2}\cdot\left(\sqrt{2x^2+4}+\sqrt{x^2+4}\right)\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{2x^2+4}+\sqrt{x^2+4}\right)\\ &= 1\cdot\left(\sqrt{2\cdot 0^2+4}+\sqrt{0^2+4}\right) = 1\cdot\left(\sqrt{4}+\sqrt{4}\right) = 4,\end{aligned}$$

där standardgränsvärdet "$\frac{\sin z}{z} \to 1$ då $z \to 0^+$" använts med $z = x^2$.
Svar: 4.