Matematiska vetenskaper
Göteborgs universitet

Lösningsförslag till tentamen
2018-06-05, 8:30–12:30

NBAM00: Naturvetenskapligt basår – Matematik, del 1

Uppgift 1. (a) Man börjar med att beräkna vektorn $(\vec{v} - 2\vec{w})$:

$$\vec{v} - 2\vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 - 2 \cdot 3 \\ 2 - 2 \cdot (-1) \\ 4 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Skalärprodukten bestäms genom att komponentvis multiplicera vektorerna och addera ihop de uppkomna talen:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} - 2\vec{w}) = 4 \cdot (-9) + a \cdot 4 + 3 \cdot (-4) = -48 + 4a\,.$$

Svar: $\vec{u} \cdot (\vec{v} - 2\vec{w}) = -48 + 4a$.

(b) Vektorerna är vinkelräta om (och endast om) skalärprodukten mellan dem är lika med noll. Man behöver alltså lösa ekvationen

$$-48 + 4a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 12.$$

Svar: Vektorerna är vinkelräta om och endast om $a = 12$.

Uppgift 2. Triangelns hörn, sidor och vinklar betecknas enligt figuren på formelbladet. Då blir $a = 10$ cm, $b = 8$ cm och $\cos\gamma = \frac{3}{5}$.

(a) Värdet på $\sin\gamma$ bestäms med hjälp av trig:ettan

$$\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma, \quad \text{alltså} \quad \sin^2\gamma = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}\,.$$

Således är $\sin\gamma = \pm\sqrt{16/25} = \pm 4/5$. Eftersom vinkeln γ har storleken mellan 0° och 180°, är värdet av $\sin\gamma$ positivt.
Svar: $\sin\gamma = \frac{4}{5}$.

(b) Areasatsen används för att bestämma arean.

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8 \cdot \frac{4}{5} = \frac{10 \cdot 8 \cdot 4}{10} = 8 \cdot 4 = 32 \text{ cm}^2.$$

Svar: Triangelns area är 32 cm^2.

(c) Den önskade sidlängden kan beräknas m.h.a. cosinussatsen:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = 100 + 64 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot \frac{3}{5} = 164 - 96 = 68.$$

Svar: $|AB| = \sqrt{68}$ cm.

(d) Värden på $\sin\alpha$ och $\sin\gamma$ beräknas m.h.a. sinussatsen.

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\alpha = \frac{a}{c}\sin\gamma, \quad \text{alltså} \quad \sin\alpha = \frac{10}{\sqrt{68}} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{\sqrt{68}} = \frac{4}{\sqrt{17}}\,.$$

$$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\beta = \frac{b}{c}\sin\gamma, \quad \text{alltså} \quad \sin\beta = \frac{8}{\sqrt{68}} \cdot \frac{4}{5} = \frac{32}{5\sqrt{68}} = \frac{16}{5\sqrt{17}}\,.$$

Svar: $\sin\alpha = 3/\sqrt{17}$ och $\sin\beta = 3{,}2/\sqrt{17}$.

Uppgift 3. (a) Enligt satsen om heltalsrötter är någon av delarna till 2 en lösning till ekvationen. Det är alltså $x = \pm 1$ och ± 2 som ska prövas:

- $x = 1$ ger $-4 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 2 = -4 - 3 + 9 - 2 = 0$. En rot har hittats!
- Struntar i $x = -1$ och $x = \pm 2$.

Ty $x = 1$ är en rot, är polynomet $-4x^3 - 3x^2 + 9x - 2$ delbart med $(x - 1)$ enligt faktorsatsen. Efter att man utfört polynomdivision, så ser man att

$$-4x^3 - 3x^2 + 9x - 2 = (x - 1)(-4x^2 - 7x + 2).$$

Man behöver alltså hitta rötter till polynomet $-4x^2 - 7x + 2$. Ekvationen $x^2 + \frac{7}{4}x - \frac{1}{2} = 0$ löses (enligt pq-formeln) av:

$$x_{2,3} = -\frac{7}{8} \pm \sqrt{\frac{49}{64} + \frac{1}{2}} = -\frac{7}{8} \pm \sqrt{\frac{49 + 32}{64}} = -\frac{7}{8} \pm \sqrt{\frac{81}{64}} = -\frac{7}{8} \pm \frac{9}{8} = \begin{cases} \frac{1}{4}, \\ -2. \end{cases}$$

Totalt har tre lösningar funnits och så är man klar.
Svar: Ekvationen löses av $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{4}$ och $x = -2$.

(b) Man kan faktoruppdela polynomet på VL m.h.a. de rötterna som funnits i (a):

$$-4x^3 - 3x^2 + 9x - 2 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4(x-1)\left(x - \frac{1}{4}\right)(x+2) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(1-4x)(x+2) \leq 0.$$

Man sammanställer en teckentabell:

x		-2		$1/4$		1	
$x - 1$	-	-	-	-	-	0	+
$1 - 4x$	+	+	+	0	-	-	-
$x + 2$	-	0	+	+	+	+	+
$(x-1)(1-4x)(x+2)$	+	0	-	0	+	0	-

Från teckentabellen läser man av att VL ≤ 0 då $x \geq 1$ eller $-2 \leq x \leq 1/4$.

Svar: $x \in [-2, 1/4] \cup [1, \infty)$.

OBS: Det är ett **grovt fel** att utnyttja rötterna som funnits i (a) för att göra faktoruppdelningen

$$-4x^3 - 3x^2 + 9x - 2 = (x - 1)(x - \tfrac{1}{4})(x + 2)$$

eftersom man då tappat bort den negativa faktorn -4 som stått framför x^3. Å andra sidan går det bra att skapa en teckentabell för $-4(x - 1)(x - \frac{1}{4})(x + 2)$, men då måste man ta hänsyn till den negativa faktorn -4 (eller så dela hela olikheten med -4 och vända på olikhetstecknet.)

Uppgift 4. pq-formeln härleds m.h.a. kvadratkomplettering.

$$\begin{aligned} x^2 + px + q = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 + 2x \cdot \frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\ &\Leftrightarrow \quad x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \end{aligned}$$

V.S.B.

Uppgift 5. (a) Potenslagarna ger

$$\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{6}{5}\right)^{-2}}{\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}\left(\frac{2}{5}\right)^3} = \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^3} = \frac{\frac{1}{6^2}}{\frac{3^2 2^3}{4^2 5^3}} = \frac{\frac{1}{(2\cdot 3)^2}}{\frac{3^2 2^3}{(2\cdot 2)^2 5^3}} = \frac{\frac{1}{2^2 3^2}}{\frac{3^2 2^3}{2^4 5^3}} = \frac{1\cdot 2^4 5^3}{2^2 3^2\cdot 3^2 2^3} = \frac{5^3}{2\cdot 3^4} = \frac{125}{162}\,.$$

Svar: $\frac{125}{162}$.

(b) Enligt logaritmlagarna är

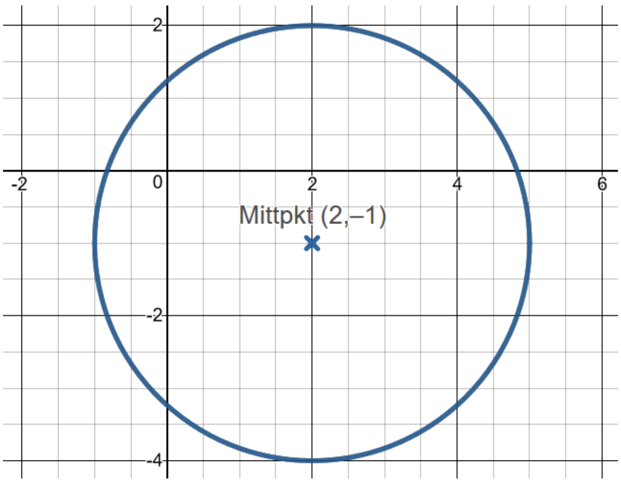
$$\lg 8 + 2\lg 5 + \ln 1 - \frac{\ln 2}{\ln 10} = \lg 8 + \lg(5^2) + 0 - \lg 2 = \lg\left(\frac{8\cdot 5^2}{2}\right) = \lg 100 = \lg(10^2) = 2\,.$$

Svar: 2.

Uppgift 6. (a) När alla icke-konstanta termer flyttats över till VL, ger kvadratkomplettering att

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + y^2 + 2y = 4 \quad &\Leftrightarrow \quad (x^2 - 4x + 4) - 4 + (y^2 + 2y + 1) - 1 = 4 \\ \Leftrightarrow \quad (x-2)^2 + (y+1)^2 - 5 = 4 \quad &\Leftrightarrow \quad (x-2)^2 + (y+1)^2 = 9\,. \end{aligned}$$

Det är alltså en cirkel med mittpunkten $(2, -1)$ och radien 3.



(b) Insättning av $y = x - 1$ i cirkelns ekvation ger

$$\begin{aligned} x^2 + (x-1)^2 = 4 + 4x - 2(x-1) \quad &\Leftrightarrow \quad 2x^2 - 2x + 1 = 6 - 2x \\ &\Leftrightarrow \quad 2x^2 - 4x - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - \frac{5}{2} = 0. \end{aligned}$$

Enligt pq-formeln löses ekvationen av

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{5}{2}} = 1 \pm \sqrt{\frac{7}{2}} = \frac{2 \pm \sqrt{14}}{2} \quad \Rightarrow \quad y_{1,2} = x_{1,2} - 1 = \pm\frac{\sqrt{14}}{2}\,.$$

Svar: Det finns två skärningspunkter: $\left(\frac{2+\sqrt{14}}{2}, \frac{\sqrt{14}}{2}\right)$ och $\left(\frac{2-\sqrt{14}}{2}, \frac{-\sqrt{14}}{2}\right)$.

(c) Eftersom det finns två skilda skärningspunkter, så är det en sekantlinje.

Uppgift 7. Vinkeln α utgår från basvinkeln $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ och ligger i 2:a eller 3:e kvadranten. Eftersom $\sin\alpha > 0$, så är det 2:a kvadranten. Således $\alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Vinkeln β baseras på vinkeln $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ och ligger i 3:e eller 4:e kvadranten. Eftersom $\cos\beta < 0$, så är det 3:e kvadranten. Således $\beta = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$.

Ekvationen kan förvandlas till en ekvation med $\tan\gamma$:

$$\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \cos\alpha\sin\gamma = -\sin\alpha\cos\gamma$$
$$\Leftrightarrow\quad \tan\gamma = -\tan\alpha = -\tan\frac{3\pi}{4} = -(-1) = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \gamma = \frac{\pi}{4} + k\pi\,.$$

Eftersom γ ligger i intervallet $[\pi, 2\pi]$, så måste $k = 1$, d.v.s. $\gamma = \frac{5\pi}{4}$.

Uppgift 8.

$$\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x^2-16}}{25-x^2}\cdot\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x^2-16}} = \Big/\text{konjugatregeln}\Big/$$
$$= \frac{(x+4)-(x^2-16)}{(5-x)(5+x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x^2-16}} = \frac{-(x^2-x-20)}{(5-x)(5+x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x^2-16}}$$
$$= \frac{(x-5)(x+4)}{(x-5)(x+5)}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x^2-16}} = \frac{x+4}{x+5}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x^2-16}}.$$

Då blir gränsvärdet

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x^2-16}}{25-x^2} = \lim_{x\to 5}\left(\frac{x+4}{x+5}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x^2-16}}\right)$$
$$= \frac{5+4}{5+5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5+4}+\sqrt{5^2-16}} = \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{3+3} = \frac{3}{20}\,.$$

Svar: $\frac{3}{20}$.