NBAM00 Naturvetenskapligt basår, Matematik del 2
Göteborgs universitet

Extra uppgifter

Derivator

1. Derivera $f(x) = \frac{e^{4x}+\tan x}{\sqrt{x}}$ (ÖT 1)

2. Derivera $f(x) = \frac{x}{\cos(2x)}$ (ÖT 2)

3. Derivera $f(x) = \frac{\sin x + xe^{2x}}{x^2}$ (170225)

4. Derivera $f(x) = \frac{3\cos x}{(2x+1)^4}$ (170608)

Tangenter och normaler

5. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = \frac{7x-1}{x+2}$ i den punkt där kurvan skär linjen $y = 2$. Bestäm även en ekvation för normalen till kurvan i samma punkt. (ÖT 1)

6. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = \sin(\cos 2x)$ i den punkt där $x = \pi/4$. (170110)

7. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = \ln(\cos x)$ i den punkt där $x = \pi/4$. (170225)

8. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = \frac{4x+1}{x-3}$ i den punkt där kurvan skär linjen $y = -9$. Bestäm även en ekvation för normalen till kurvan i samma punkt. (170608)

Optimering

9. Kurvan $y = 2\cos x,\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, är given. Av alla rektanglar, som har ett hörn i origo, en sida på positiva x-axeln, en sida på positiva y-axeln och ett hörn på givna kurvan, är det en som har störst omkrets. Beräkna denna största omkrets. Av lösningen ska det framgå att den funna omkretsen verkligen är den största. (ÖT 1)

10. Finn den rätvinkliga triangel med area 2 a.e. som har kortast hypotenusa. Av lösningen ska det framgå att den funna triangeln verkligen har kortast möjliga hypotenusa. (ÖT 2)

11. Beräkna största möjliga area av en rektangelformad hage där en sida utgörs av en (obegränsat lång) rak flod och övriga tre sidor utgörs av 100 meter staket (dvs summan av de tre staket-sidornas längder är 100 meter). (170110)

12. Kurvan $y = 4/x^2,\ x > 0$, är given. Av alla rektanglar, som har ett hörn i origo, en sida på positiva x-axeln, en sida på positiva y-axeln och ett hörn på givna kurvan, är det en som har minst omkrets. Beräkna denna minsta omkrets. Av lösningen ska det framgå att den funna omkretsen verkligen är den minsta. (170225)

13. Kurvan $y = 12 - x^2,\ x \geq 0$, är given. Av alla rektanglar, som har ett hörn i origo, en sida på positiva x-axeln, en sida på positiva y-axeln och ett hörn på givna kurvan, är det en som har störst area. Beräkna denna största area samt i vilken punkt på kurvan som rektangeln med störst area har ett hörn. Av lösningen ska det framgå att den funna arean verkligen är den största. (170608)

Kurvkonstruktioner

14. Funktionen $f(x) = \frac{4(x-1)^2}{(2x-1)(x-2)}$ är given. Undersök med hjälp av derivatan, och teckenschema, i vilka intervall som $f(x)$ växer respektive avtar och redovisa förekommande lokala extrempunkter och terrasspunkter. Rita kurvan $y = f(x)$ och redovisa förekommande vågräta respektive lodräta asymptoter till kurvan. (ÖT 1)

15. Rita funktionskurvan $f(x) = \frac{2x}{2+x^2}$ och redovisa med hjälp av teckenschema förekommande lokala extrempunkter och terrasspunkter. Redovisa även eventuella vågräta och lodräta asymptoter till kurvan. (ÖT 2)

16. Undersök med hjälp av derivatan, och teckenschema, i vilka intervall som funktionen

$$f(x) = \frac{x^2}{4 - x^2}$$

är växande respektive avtagande och redovisa förekommande lokala extrempunkter och terrasspunkter. Bestäm förekommande vågräta respektive lodräta asymptoter till kurvan $y = f(x)$ samt rita kurvan. (170110)

17. Låt f vara funktionen $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$.

(a) Bestäm definitionsmängden till f. Derivera $f(x)$ och gör ett teckenschema, av vilket det ska framgå i vilka intervall f är avtagande respektive växande.

(b) Redovisa, med hjälp av teckenschemat, förekommande lokala extrempunkter till f.

(c) Bestäm eventuella lodräta asymptoter till kurvan $y = f(x)$. Motivera!

(d) Bestäm eventuella vågräta asymptoter till kurvan $y = f(x)$. Motivera!

(e) Rita kurvan $y = f(x)$. Tänk på att alla resultat ovan bör framgå i grafen. (170225)

18. Låt f vara funktionen $f(x) = \frac{x^2}{x^2-2}$.

(a) Bestäm definitionsmängden till f. Derivera $f(x)$ och gör ett teckenschema, av vilket det ska framgå i vilka intervall f är avtagande respektive växande.

(b) Redovisa, med hjälp av teckenschemat, förekommande lokala extrempunkter till f.

(c) Bestäm eventuella lodräta asymptoter till kurvan $y = f(x)$. Motivera!

(d) Bestäm eventuella vågräta asymptoter till kurvan $y = f(x)$. Motivera!

(e) Rita kurvan $y = f(x)$. Tänk på att alla resultat ovan bör framgå i grafen. (170608)

Integraler

19. Beräkna $\int \left(\frac{2}{x\sqrt{x}} + 6\sin(3x)\right) dx$. (ÖT 1)

20. Beräkna $\int_1^2 (3x^2 - 3\sqrt{x})\, dx$. (ÖT 2)

21. Beräkna $\int \left(\frac{2}{x} + 6\cos 2x\right) dx$. (170110)

22. Beräkna $\int \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \sin 3x\right) dx$. (170225)

23. Beräkna $\int \left(\frac{1}{3x^{2/3}} + e^{2x}\right) dx$. (170608)

Areor

24. Området som begränsas av kurvorna $y = \frac{4}{x^2}$ och $y = 2 + 3\sqrt{x}$ samt av linjerna $x = 1$ och $x = 4$ är givet. Rita en skiss som visar ungefär hur området ser ut och beräkna områdets area. (ÖT 1)

25. Området som begränsas av kurvan $y = \frac{4}{x}$, $1 \leq x \leq 4$, samt av kurvans normal i punkten $(1, 4)$ och kurvans tangent i punkten $(4, 1)$ är givet.

(a) Beräkna koordinaterna för skärningspunkten mellan normalen och tangenten.

(b) Rita området och beräkna dess area. (ÖT 2)

26. Rita området som begränsas av kurvorna $y = x^2$ och $y = 2 + x$ och beräkna områdets area. (170110)

27. Rita området som begränsas av positiva x-axeln, kurvan $y = x^2$ och linjerna $y = 2 - x$ och $y = 6 - x$. Beräkna områdets area. (170225)

28. Beräkna arean av det område som begränsas av kurvorna $y = x^2$ och $y = 1/x$ samt linjerna $x = 1/2$ och $x = 2$. Rita en skiss av området. (170608)

Differentialekvationer

29. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y' - xy = x$$

Bestäm även den lösning som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 1$. (ÖT 1)

30. Bestäm konstanten a så att funktionen $f(x) = \sin(e^{2x})$ blir en lösning till differentialekvationen

$$y'' - 2y' + 4e^{4x}y = a$$

(ÖT 2)

31. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y' + 3x^2 y = e^{-x^3}$$

Bestäm även den lösning som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 1$. (170110)

32. Bestäm konstanten a så att funktionen $f(x) = \ln(\cos x)$ blir en lösning till differentialekvationen

$$y'' - y' \tan x = a$$

(170225)

33. En fågelunge faller från en hög klippa. Låt $v(t)$ beteckna fallhastigheten i m/s efter tiden t sekunder. Fallrörelsen kan förenklat beskrivas med följande differentialekvation

$$v'(t) + 5v(t) = 10$$

(a) Bestäm fallhastigheten $v(t)$ och utgå ifrån att fallhastigheten är noll då $t = 0$.

(b) Beräkna (exakt) hur långt fågelungen fallit efter 4 sekunder, samt avrunda svaret till hela meter. (170608)

Komplexa tal

34. (a) Skriv talet $\frac{1-3i}{3+i} - \frac{2}{i}$ på formen $x + iy$ där x och y är reella tal.

(b) Lös ekvationen $z^2 - (2 + 4i)z - 6 = 0$. (ÖT 1)

35. (a) Låt $z = 3\sqrt{3} + 3i$. Beräkna $|z|$ och skriv z på polär form.

(b) Beräkna $(3\sqrt{3} + 3i)^{99}$ och skriv svaret på formen $x + iy$. (ÖT 2)

36. (a) Skriv talet $4e^{i2\pi/3}$ på formen $x + iy$ där x och y är reella tal.

(b) Lös ekvationen $z^2 - (3 + i)z + 4 + 3i = 0$. (170110)

37. (a) Beräkna $(1 + i)^{100}$ och skriv svaret på formen $a + ib$.

(b) Lös ekvationen $z^2 - 2iz - 1 + 8i = 0$.

(c) Kontrollera att dina lösningar i 4b) är riktiga. (170225)

38. (a) Låt $z = 3 - i3\sqrt{3}$. Beräkna $|z|$ och skriv z på polär form.

(b) Beräkna $(3 - i3\sqrt{3})^{69}$ och skriv svaret på formen $x + iy$. (170608)

Blandat

39. Visa att funktionen $f(x) = 2e^x - x - 1$ saknar nollställen. (ÖT 2)

40. Visa att olikheten

$$2\sin x + \tan x > 3x$$

gäller då $0 < x < \pi/2$. (170110)

41. Låt funktionen $f(a)$ vara definierad som den bestämda integralen

$$f(a) = \int_0^1 (ae^{ax} - a)\,dx$$

Beräkna största och minsta värde till $f(a)$ då $-1 \leq a \leq 1$. (170225)