Vektorer*

Hasse Carlsson Lukáš Malý

Institutionen för Matematiska vetenskaper
Göteborgs universitet och Chalmers tekniska högskola

Version 2019

Du är säkert väl förtrogen med hur (reella) tal kan användas för att beskriva olika storheter inom naturvetenskap, t.ex. längd, temperatur, strömstyrka och fart. Dessa storheter kallas ofta för *skalärer*.

Andra storheter har både riktning och storlek. Några sådana exempel är kraft, acceleration, hastighet och magnetfält. Sedan länge har man beskrivit dessa storheter, t.ex. krafter, med hjälp av pilar (riktade sträckor) där pilen pekar i kraftens riktning och pilens längd anger kraftens storlek. Storheter med både riktning och storlek kallas *vektorer*. Vi skall lära oss att räkna med dessa vektorer och på så sätt skapa oss ett verktyg för att angripa problem av olika slag.

1 Geometriska vektorer

Med ledning av diskussionen i inledningen skall vi definiera vektorer och operationer på vektorer i både planet och rummet. Definitionen bygger på geometriska resultat om t.ex. parallellitet och likformighet. Omvänt kan vi därför genom att räkna med vektorer bevisa geometriska resultat.

Om man studerar hastigheten hos en båt (i synnerhet om vågorna är små) är det naturligt att bara hålla reda på hur den rör sig med avsende på två riktningar; nord-sydlig och öst-västlig. En båt kan t.ex. köra med 12 knop i nordnordvästlig riktning. Om man i stället studerar ett flygplan behöver man också hålla reda på en tredje riktning; nämligen den vertikala. Planet kan stiga 30° med hastigheten 572 km/tim i sydostlig riktning. Man säger därför att planet (inte flygplanet) är tvådimensionellt och rummet tredimensionellt och vi använder ofta beteckningarna $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ för planet respektive rummet.

Definition 1.1. Två punkter A och B bestämmer en *riktad sträcka* från A till B som betecknas $\overrightarrow{AB}$.

Varje riktad sträcka bestämmer i sin tur en *vektor*. Två sträckor som är lika långa och lika riktade bestämmer samma vektor. Vektorer betecknas med gemener i fetstil,

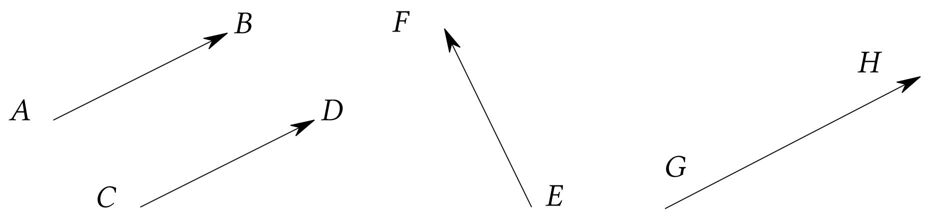
*Materialet bygger på valda (delvis omarbetade) delar av kompendiet *”Vektoralgebra: En inledning”* av Hasse Carlsson som kan laddas ned från `http://www.math.chalmers.se/~hasse/`

t.ex. $\mathbf{u}$. En annan ganska vanlig beteckning man kan stöta på i litteratur (dock inte i detta kompendium) är $\vec{u}$.

Nollvektorn är den vektor som fås då start- och slutpunkt sammanfaller. Nollvektorn betecknas $\mathbf{0}$ (eller möjligtvis $\vec{0}$) och alltså är $\mathbf{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$.

Om $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, så är $-\mathbf{u}$ den vektor som är lika lång som $\mathbf{u}$ men motsatt riktad mot $\mathbf{u}$, d.v.s. $-\mathbf{u} = \overrightarrow{BA}$. Längden av vektorn $\mathbf{u}$ definieras som längden av sträckan AB och betecknas $|\mathbf{u}|$.

Exempel 1.2. Betrakta följande figur:

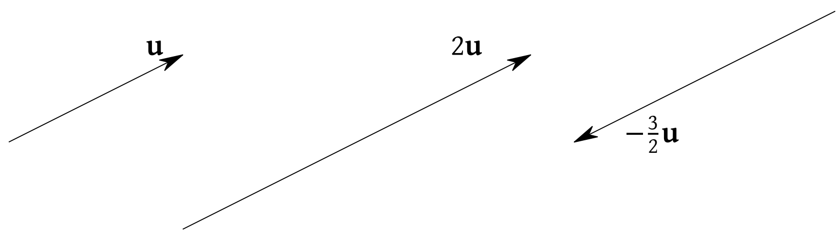


Sträckorna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{CD}$ är *lika långa* och *lika riktade* och bestämmer alltså *samma vektor* $\mathbf{u}$. Vi skriver $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Sträckan $\overrightarrow{EF}$ är lika lång som $\overrightarrow{AB}$ men inte parallell med $\overrightarrow{AB}$. Så om $\mathbf{v} = \overrightarrow{EF}$, är $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$. Sträckan $\overrightarrow{GH}$ är lika riktad men inte lika lång som $\overrightarrow{AB}$, så om $\mathbf{w} = \overrightarrow{GH}$ är $\mathbf{w} \neq \mathbf{u}$. Eftersom $\overrightarrow{EF}$ och $\overrightarrow{GH}$ varken är lika långa eller lika riktade så är också $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$. ◇

Operationer på vektorer

Multiplikation av en vektor med en skalär

Definition 1.3. Om t är ett reellt tal och $\mathbf{u}$ är en vektor så är $t\mathbf{u}$ den vektor som har längden $|t||\mathbf{u}|$ och är lika riktad som $\mathbf{u}$ om $t > 0$ och motsatt riktad mot $\mathbf{u}$ om $t < 0$. När $t = 0$ är $t\mathbf{u} = \mathbf{0}$.



Exempel 1.4.

(a) $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$,

(b) $(-1) \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{u}$,

(c) $t \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ för alla reella tal t,

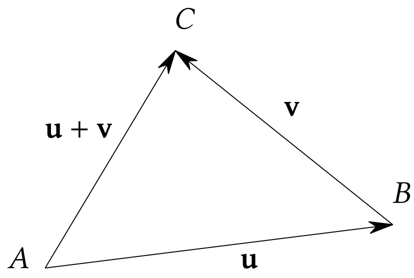
(d) $0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$ för alla vektorer $\mathbf{u}$. ◇

Observera att vektorerna $\mathbf{u}$ och $t\,\mathbf{u}$ är parallella. Om $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ så kan varje vektor $\mathbf{v}$ som är parallell med $\mathbf{u}$ skrivas $\mathbf{v} = t\,\mathbf{u}$ för något reellt tal t.

Addition av vektorer

Vi skall nu definiera addition av vektorer. Definitionen görs så att kraftparallellogramlagen blir uppfylld.

Definition 1.5. Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två vektorer. Välj tre punkter A, B och C som representerar vektorerna så att $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ och $\mathbf{v} = \overrightarrow{BC}$. Då är $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$.



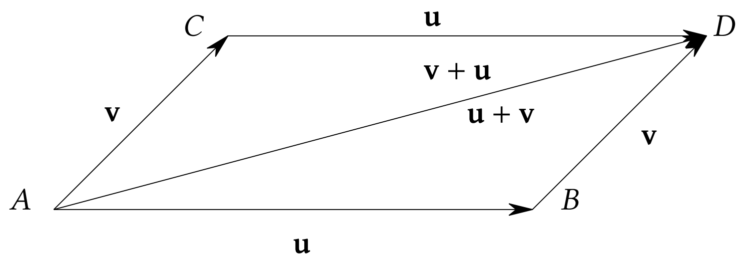
Man kan tänka sig att summan av två vektorer är den vektor som fås när $\mathbf{v}$:s ände placeras mot $\mathbf{u}$:s spets och en pil dras från den fria änden mot den fria spetsen (d.v.s. från $\mathbf{u}$:s ände mot $\mathbf{v}$:s spets).

Räkneregler

(i) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (*kommutativitet*),
(ii) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ (*associativitet*),
(iii) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$,
(iv) $t(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = t\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ (*distributivitet*),
(v) $(s + t)\mathbf{u} = s\mathbf{u} + t\mathbf{u}$ (*distributivitet*),
(vi) $s(t\mathbf{u}) = (st)\mathbf{u}$.

Vi visar bara (i), (ii) och (iv) då $t > 0$, och låter läsaren själv fundera ut varför de övriga är sanna.

Kommutativiteten följer ur följande figur.



I parallellogrammen $ABCD$ är $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ och $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. Så

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \mathbf{v} + \mathbf{u}.$$

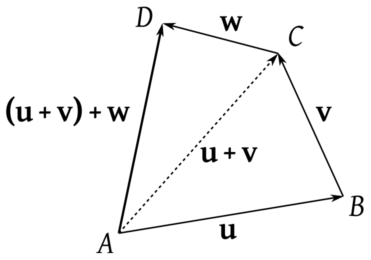
För att visa (ii), välj fyra punkter A, B, C och D så att $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{BC}$ och $\mathbf{w} = \overrightarrow{CD}$. Då är

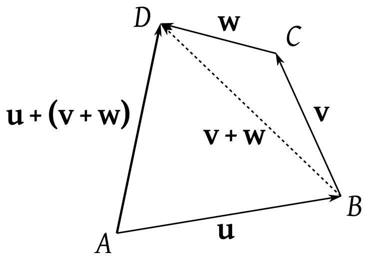
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{AC} \quad \text{och så} \quad (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.$$

Analogt får man att

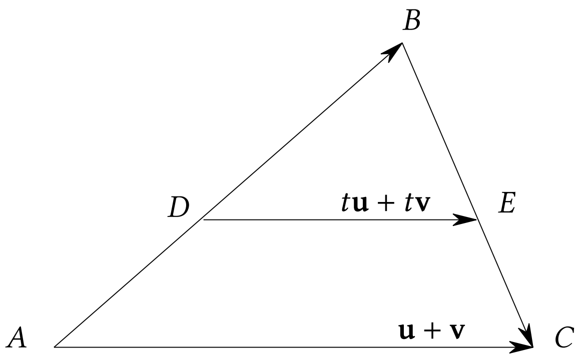
$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \overrightarrow{BD} \quad \text{och så} \quad \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD},$$

vilket innebär att $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \overrightarrow{AD} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$. Se gärna figuren nedan.





Att (iv) gäller följer av likformighet. Antag att $t > 0$ och betrakta trianglarna ABC och DBE där $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{BC}$, $t\mathbf{u} = \overrightarrow{DB}$ och $t\mathbf{v} = \overrightarrow{BE}$.



Trianglarna ABC och DBE är likformiga med förhållandet $1 : t$. (Varför?) Så $\overrightarrow{AC}$ och $\overrightarrow{DE}$ är lika riktade och $|\overrightarrow{DE}| = t\,|\overrightarrow{AC}|$. Det betyder att $\overrightarrow{DE} = t\overrightarrow{AC}$ och

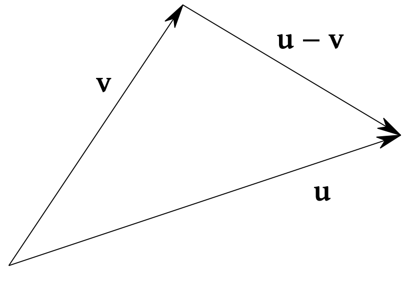
$$t(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = t\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BE} = t\mathbf{u} + t\mathbf{v}\,. \qquad \square$$

Anmärkning 1.6. Figuren i beviset av (i) visar att addition av vektorer uppfyller parallellogramlagen för krafter. Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är krafter så är $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ krafternas resultant; om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ påverkar en partikel så blir effekten densamma som när partikeln bara påverkas av kraften $\mathbf{u} + \mathbf{v}$. ◇

Subtraktion av vektorer

Definition 1.7. $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$.

Vi har $\mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{0}$, ty om $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ så är $-\mathbf{u} = \overrightarrow{BA}$ och $\mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \mathbf{0}$.

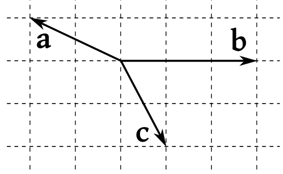


Observera att $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ löser ekvationen $\mathbf{v} + \mathbf{x} = \mathbf{u}$ eftersom $\mathbf{v} + (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = (\mathbf{v} - \mathbf{v}) + \mathbf{u} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$. Så om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ placeras så att de startar i samma punkt är $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ den vektor som startar i spetsen av $\mathbf{v}$ och slutar i spetsen av $\mathbf{u}$. (Man kan också se detta genom att skriva $\mathbf{u} - \mathbf{v} = -\mathbf{v} + \mathbf{u}$.)

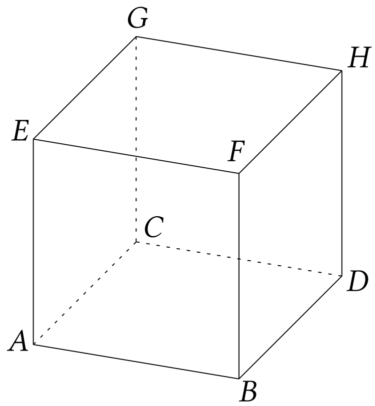
Övning 1.1. Bestäm

$$\text{(a) } 2\mathbf{a}+\mathbf{b}, \qquad \text{(b) } \mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}, \qquad \text{(c) } \frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}),$$

där vektorerna **a**, **b**, **c** ges av figuren:



Övning 1.2. Låt $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{AC}$ och $\mathbf{e}_3 = \overrightarrow{AE}$ i följande kub.



Bestäm tal x, y och z så att $\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ då

(a) $\mathbf{v} = \overrightarrow{AD}$, (b) $\mathbf{v} = \overrightarrow{EH}$, (c) $\mathbf{v} = \overrightarrow{AG}$, (d) $\mathbf{v} = \overrightarrow{HA}$, (e) $\mathbf{v} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HA}$.

Övning 1.3. En motorbåt går i stillastående vatten med farten 6 m/s. Båten körs i en älv där vattnet strömmar rakt söderut med farten 2 m/s.

(a) Bestäm båtens hastighet (riktning och fart) om den styrs i rakt östlig riktning.

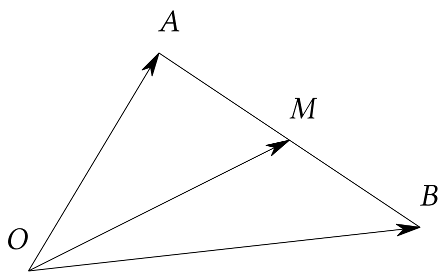
(b) Vilken kurs skall båten hålla för att röra sig rakt öster ut?

Geometriska tillämpningar

I det här avsnittet ger vi några tillämpningar av vektoralgebra på geometriska problem.

Exempel 1.8. Låt O, A och B vara tre punkter. Om M är mittpunkten på sträckan $\overrightarrow{AB}$, så gäller

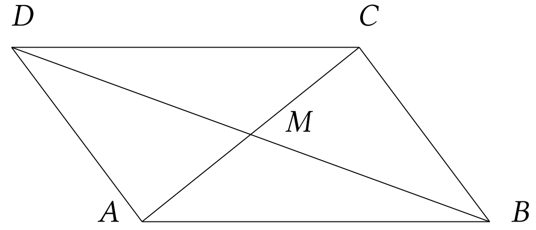
$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right).$$



Varför? Jo, eftersom $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, så gäller

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}. \qquad \diamond$$

Exempel 1.9. Diagonalerna i en parallellogram delar varandra mitt itu.



Påståendet innebär att diagonalernas skärningspunkt är mittpunkt både på diagonalen AC och på diagonalen BD. Så här visar man detta:

Låt M vara mittpunkten på diagonalen BD. För att visa påståendet räcker det att visa att M också är mittpunkt på diagonalen AC. (Varför?) Enligt förra exemplet är

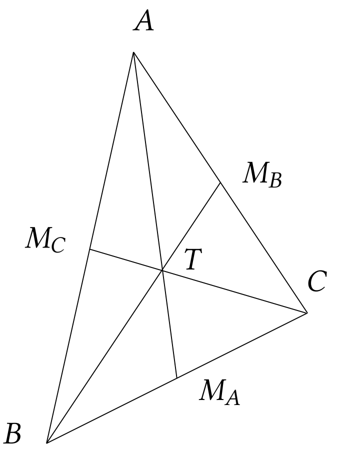
$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right).$$

Men $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ så

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC},$$

d.v.s. M är mittpunkt på diagonalen AC. $\diamond$

Exempel 1.10 (En triangels tyngdpunkt)**.** En median i en triangel är sträckan från ett hörn till motstående sidas mittpunkt. Vi skall visa att medianerna skär varandra i en punkt som delar medianen i förhållandet 2 : 1 från spetsen räknat. Denna punkt kallas triangelns tyngdpunkt. (Varför då?)



Låt O vara en godtycklig punkt, M_A, M_B och M_C vara triangelsidornas mittpunkter (se figur) och T_A vara den punkt på linjen AM_A som delar AM_A i förhållandet 2 : 1. Då gäller $\overrightarrow{AT}_A = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM_A}$. Exempel 1.8 ger att $\overrightarrow{AM_A} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Så

$$\overrightarrow{AT}_A = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM_A} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

Detta ger

$$\overrightarrow{OT}_A = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AT}_A = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC})\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) .$$

Om $\overrightarrow{BT}_B = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM_B}$ och $\overrightarrow{CT}_C = \frac{2}{3}\overrightarrow{CM_C}$ får vi på samma sätt (eller ännu enklare på grund av symmetri) att

$$\overrightarrow{OT}_B = \overrightarrow{OT}_C = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) .$$

Så

$$\overrightarrow{OT}_A = \overrightarrow{OT}_B = \overrightarrow{OT}_C \qquad \text{och} \qquad T_A = T_B = T_C =: T$$

och alltså ligger T på alla medianerna. ◇

Observera om O är en godtycklig punkt och T triangelns tyngdpunkt så har vi visat att

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) .$$

Anmärkning 1.11. Beviset ovan är ett ”orakelbevis”. Hur kunde vi veta att tyngdpunkten delar medianen i förhållandet $2 : 1$?

Här ger vi ett alternativt bevis som inte utnyttjar detta faktum. Låt som förut O vara en godtycklig punkt, M_A, M_B och M_C vara triangelsidornas mittpunkter och T skärningspunkten mellan AM_A och BM_B. Eftersom $\overrightarrow{AM_A}$ och $\overrightarrow{AT}$ är lika riktade gäller $\overrightarrow{AT} = a\,\overrightarrow{AM_A}$ för någon positiv skalär a. På samma sätt gäller $\overrightarrow{BT} = b\,\overrightarrow{BM_B}$ för något positivt tal b.

Eftersom M_A och M_B är mittpunkter på sträckan BC respektive AC så gäller $\overrightarrow{AM_A} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ och $\overrightarrow{BM_B} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$. Så

$$\overrightarrow{AT} = \frac{a}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \qquad \text{och} \qquad \overrightarrow{BT} = \frac{b}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right) .$$

Detta ger

$$\overrightarrow{BT} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AT} = \overrightarrow{BA} + \frac{a}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \left(\frac{a}{2} - 1\right)\overrightarrow{AB} + \frac{a}{2}\,\overrightarrow{AC},$$

men också

$$\overrightarrow{BT} = \frac{b}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{b}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = b\,\overrightarrow{BA} + \frac{b}{2}\,\overrightarrow{AC}.$$

Så

$$\left(\frac{a}{2} - 1\right)\overrightarrow{AB} + \frac{a}{2}\,\overrightarrow{AC} = b\,\overrightarrow{BA} + \frac{b}{2}\,\overrightarrow{AC}$$

och

$$\left(\frac{a}{2} + b - 1\right)\overrightarrow{AB} = \frac{b-a}{2}\,\overrightarrow{AC} .$$

Men vektorerna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$ är *inte* parallella och därför är

$$\left(\frac{a}{2} + b - 1\right) = \frac{b-a}{2} = 0 ,$$

vilket ger $a = b = \frac{2}{3}$.

Nu har vi själva visat att att tyngdpunkten delar medianen i förhållandet $2 : 1$ och behöver inte hänvisa till något orakel. ◇

Övning 1.4. Visa att om $\overrightarrow{OP} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$ så är P mittpunkt på sträckan AB.

Lägg märke till att detta påstående är annorlunda än Exempel 1.8. I exemplet utgick man från att M är sträckans mittpunkt och som slutsats bevisade man att $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$. I denna övning förutsätter man att sambandet $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ är sant och man vill härleda att P då måste vara mittpunkten.

Övning 1.5. Låt O, P och Q vara tre olika punkter i planet (eller rummet). Sätt $\mathbf{u} = \overrightarrow{OP}$ och $\mathbf{v} = \overrightarrow{OQ}$.

(a) Låt R vara den punkt mellan P och Q som delar sträckan PQ i förhållandet $a : b$, d.v.s., $\frac{|PR|}{|RQ|} = \frac{a}{b}$, där $a, b > 0$. Uttryck vektorn $\overrightarrow{OR}$ i $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

(b) Låt S vara den punkt som ligger på förlängningen av sträckan PQ och vars avstånd från punkterna P och Q är i förhållandet $p : q$, d.v.s., $\frac{|PS|}{|QS|} = \frac{p}{q}$, där $p > q > 0$. Uttryck vektorn $\overrightarrow{OS}$ i $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

Övning 1.6. Visa att om $\overrightarrow{OP} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$ så är P tyngdpunkt i triangeln ABC.

Observera att detta påstående skiljer sig från Exempel 1.10. Den implikation som ska bevisas i övningen går åt andra hållet jämfört med implikationen i exemplet.

Övning 1.7. Punkterna D, E och F delar triangeln ABC så att $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BE}$ och $\overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{CF}$. Visa att trianglarna ABC och DEF har samma tyngdpunkt.

Övning 1.8. Låt M vara mittpunkten på sträckan mellan två motstående kanters mittpunkter i tetraedern $ABCD$. (Tetraeder = en regelbunden tresidig pyramid)

(a) Visa att $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

(b) Hur många par av motstående kanter finns det?

(c) Visa att punkten M i (a) inte beror på vilka kanter vi valt, d.v.s. sträckan mellan mittpunkterna på motstående kanter skär varandra i en punkt.

2 Baser och koordinater

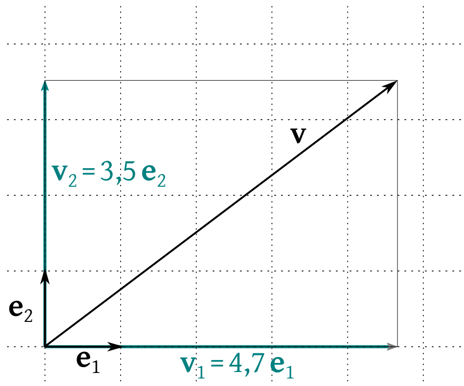
För att göra det mer praktiskt att räkna med geometriska vektorer i planet och rummet skall vi se hur man kan representera dem som par respektive tripplar av reella tal. På så sätt kan man räkna med vektorer ”som vanligt” fast med två respektive tre kopior av $\mathbb{R}$.

Baser i planet

Definition 2.1. Två vektorer i planet $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ som har längd 1 och är vinkelräta mot varandra utgör en *ortonormerad bas* (eller en *ON-bas*).

Anmärkning 2.2. Ordet ”ortonormerad” är en sammandragning av *ortogonal* (d.v.s. vinkelrät) och *normerad* (d.v.s. längden är 1). Mer allmänt kan man definiera en *bas* i planet genom att kräva att vektorerna $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ är nollskilda och icke-parallella. I detta kompendium använder vi dock enbart ON-baser. ◇

Nu ska vi titta på hur basvektorerna används för att specificera godtyckliga vektorer. Låt $\mathbf{v}$ vara en vektor i planet. Placera $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{v}$ så att de börjar i samma punkt. Drag linjer genom $\mathbf{v}$:s båda ändpunkter parallella med $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ och låt $\mathbf{v_1}$ och $\mathbf{v_2}$ vara sidorna i den rektangel som bildas.



Då är $\mathbf{v} = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$. Eftersom $\mathbf{v_1}$ och $\mathbf{v_2}$ är parallella med $\mathbf{e}_1$ respektive $\mathbf{e}_2$ finns tal x och y sådana att $\mathbf{v_1} = x\,\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{v_2} = y\,\mathbf{e}_2$. Med andra ord är $\mathbf{v} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2$. (I den illustrativa figuren ovan är alltså $x = 4{,}7$ och $y = 3{,}5$.) På så sätt har vi visat ena halvan av följande sats.

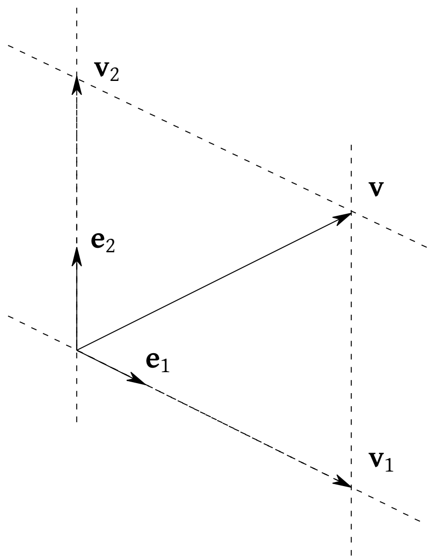
Sats 2.3. *Om* $\mathbf{e}_1$ *och* $\mathbf{e}_2$ *är en ON-bas i planet så kan* varje vektor $\mathbf{v}$ entydigt *skrivas*

$$\mathbf{v} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2.$$

Talen x *och* y *kallas för* $\mathbf{v}$*:s* koordinater *i basen* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$*.*

Bevis av entydigheten. Antag att man kan uttrycka $\mathbf{v} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 = x'\,\mathbf{e}_1 + y'\,\mathbf{e}_2$. Vi behöver alltså avgöra om $x = x'$ och $y = y'$. Genom att flytta över termerna i ekvationen får man att $(x - x')\mathbf{e}_1 = (y' - y)\mathbf{e}_2$. Skulle $x \neq x'$, så vore $\mathbf{e}_1 = \dfrac{y' - y}{x - x'}\,\mathbf{e}_2$, d.v.s. $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ bleve parallella, men det är inte de. Därför måste $x = x'$. På analogt sätt motiverar man att $y = y'$. □

Anmärkning 2.4. Satsen gäller även för en allmän bas $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ i planet med likadant bevis. Den enda skillnaden i resonemanget är att man inte får en rektangel när linjer parallella med basvektorerna dras genom $\mathbf{v}$:s ändpunkter utan man får en parallellogram. Se gärna figuren nedan.



◇

Om det är klart vilka basvektorerna är, skriver vi helt kort $\mathbf{v} = (x, y)$ i stället för $\mathbf{v} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2$ och kallar x och y för $\mathbf{v}$:s koordinater.

Sats 2.5. *Om* $\mathbf{v} = (x, y)$, $\mathbf{u} = (x', y')$ *och* $t \in \mathbb{R}$ *så gäller*

$$t\,\mathbf{v} = t\,(x, y) = (tx, ty) \qquad \textit{och} \qquad \mathbf{v} + \mathbf{u} = (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y').$$

Bevis. Satsen följer enkelt från räknereglerna för vektorer. Vi har

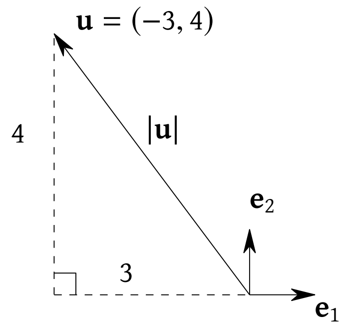
$$t\,\mathbf{v} = t(x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2) = tx\,\mathbf{e}_1 + ty\,\mathbf{e}_2 = (tx, ty)$$

och

$$\mathbf{v} + \mathbf{u} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 + x'\,\mathbf{e}_1 + y'\,\mathbf{e}_2 = (x + x')\,\mathbf{e}_1 + (y + y')\,\mathbf{e}_2 = (x + x', y + y'). \quad \square$$

Exempel 2.6. Antag att $\mathbf{u} = (-3, 4)$ i en ortonormerad bas. Hur lång är vektorn $\mathbf{u}$?

Lösning. Pythagoras sats ger (se figuren) $|\mathbf{u}|^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ så $|\mathbf{u}| = 5$.



Med samma resonomang ser vi generellt att om $\mathbf{u} = (x, y)$ så är

$$|\mathbf{u}|^2 = x^2 + y^2 \quad \text{och} \quad |\mathbf{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad \diamond$$

Exempel 2.7. Krafterna $\mathbf{F_1} = (-1, 2)$ och $\mathbf{F_2} = (2, -3)$ (i Newton) verkar på en partikel. Hur stor är deras sammanlagda verkan?

Lösning. Den resulterande kraften är

$$\mathbf{F} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} = (-1, 2) + (2, -3) = (1, -1). \qquad \text{Således} \qquad |\mathbf{F}| = \sqrt{1 + 1}\,\mathrm{N} = \sqrt{2}\,\mathrm{N}. \quad \diamond$$

Övning 2.1. Antag att $\mathbf{u} = (3, 1)$, $\mathbf{v} = (-3, 3)$ och $\mathbf{w} = (-2, -2)$. Bestäm

(a) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$; (b) $\mathbf{u} + 3\mathbf{w}$; (c) $2\mathbf{u} - \mathbf{v}$; (d) $3\mathbf{u} - \mathbf{v} + 2\mathbf{w}$.

Övning 2.2. Antag att $\mathbf{u} = (1, 2)$ och att $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (3, 4)$. Vad är då $\mathbf{v}$?

Övning 2.3. Antag att $\overrightarrow{AB} = (2, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (3, 2)$. Bestäm $\overrightarrow{BC}$.

Övning 2.4. Bestäm tal x och y sådana att $\mathbf{u} = x\mathbf{v} + y\mathbf{w}$ då

$$\mathbf{u} = (5, -4), \qquad \mathbf{v} = (1, 2) \qquad \text{och} \qquad \mathbf{w} = (-3, 1)\,.$$

Baser i rummet

Definition 2.8. Tre vektorer $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_3$ utgör en *ON-bas* för $\mathbb{R}^3$ om de är inbördes vinkelräta och alla har längden 1.

Anmärkning 2.9. Mer allmänt kan man införa begreppet *bas* för $\mathbb{R}^3$ genom att kräva att de tre vektorerna $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_3$ är alla nollskilda och att de inte ligger i ett enda plan. ◇

Sats 2.10. *Om* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ *och* $\mathbf{e}_3$ *är en (ON-)bas i rummet, så kan varje vektor* $\mathbf{v}$ entydigt *skrivas*

$$\mathbf{v} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 + z\,\mathbf{e}_3\ .$$

Beviset för satsen i tre dimensioner är något mer invecklat och utelämnas. Som i $\mathbb{R}^2$ skriver vi kortfattat $\mathbf{v} = (x, y, z)$ och vi har räknereglerna

$$t\,(x, y, z) = (tx, ty, tz) \quad \text{och} \quad (x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')\ .$$

Med hjälp av Pythagoras sats ser vi (Hur då?) att i en ortonormerad bas ges en vektors längd av

$$|\mathbf{u}|^2 = |(x, y, z)|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{och} \quad |\mathbf{u}| = |(x, y, z)| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ .$$

Övning 2.5. Sätt $\mathbf{u} = (-1, 2, 0)$, $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$. Beräkna $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$.

Övning 2.6. Bestäm $\overrightarrow{BC}$ om $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 1)$ och $\overrightarrow{AC} = (2, 1, 3)$.

Övning 2.7. Bestäm tal x och y sådana att $\mathbf{u} = x\mathbf{v} + y\mathbf{w}$ då

$$\mathbf{u} = (2, -7, 1), \qquad \mathbf{v} = (2, -1, 3) \qquad \text{och} \qquad \mathbf{w} = (1, 1, 2)\ .$$

Övning 2.8. Undersök om vektorerna $(1, 2, -2)$ och $(-3, -6, -6)$ är parallella.

Övning 2.9. Bestäm ett tal a så att vektorerna $(a, 2 + a, 6)$ och $(2, 1, -3)$ är parallella.

Övning 2.10. Bestäm ett tal t så att vektorerna

(a) $(1, 2)$ och (t, t^2); (b) $(t, 1 - t, 1 + t)$ och $(2, 0, 4)$; (c) $(t, 2t^2, 3t)$ och $(1, 6, t)$

blir parallella.

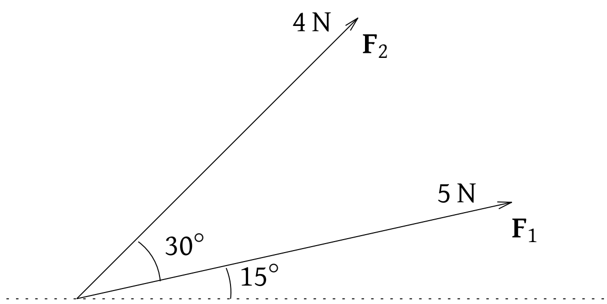
Övning 2.11. Bestäm längderna av vektorerna

(a) $(-1, -2, -3)$; (b) $(1, 1, 1)$; (c) $(-1, 2, 2)$.

Övning 2.12. Bestäm en vektor $\mathbf{u}$ som har längden 1 och är parallell med $(-1, 2, 2)$.

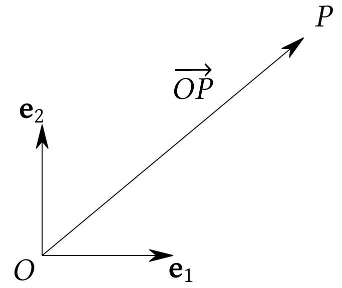
Övning 2.13. Krafterna $\mathbf{F}_1$ och $\mathbf{F}_2$ verkar på en partikel. Bestäm storlek och riktning av krafternas resultant om (a) $\mathbf{F}_1 = (1, -3, 4)$ och $\mathbf{F}_2 = (5, 9, 2)$; *(koordinaterna angivna i en ON-bas med SI-längdenheterna)*

(b) $\mathbf{F}_1$ och $\mathbf{F}_2$ ges av följande figur:



Koordinatsystem

I det här avsnittet skall vi beskriva punkter med hjälp av koordinater. Detta gör vi genom att fixera en punkt O som vi kallar *origo*. En punkt P bestämmer en vektor $\mathbf{u} = \overrightarrow{OP}$ och omvänt om vi har en vektor $\mathbf{u}$ så finns det en punkt P så att $\mathbf{u} = \overrightarrow{OP}$. Vektorn $\overrightarrow{OP}$ kallas för P:s *ortsvektor*.



Vi har alltså identifierat punkten P med vektorn $\overrightarrow{OP}$. Om $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$ i en viss (ON-)bas får P samma kordinater, d.v.s. vi skriver $P = (x, y, z)$. För origo gäller $O = (0, 0, 0)$. (Varför?)

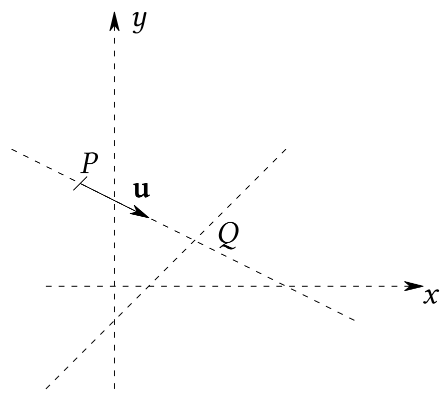
Exempel 2.11. Bestäm koordinaterna för den vektor $\overrightarrow{PQ}$ som går från punkten $P = (1, -2, 1)$ till punkten $Q = (-2, 1, 0)$.

Lösning. Vi har

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}. \quad \text{Så } \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = Q - P = (-2, 1, 0) - (1, -2, 1) = (-3, 3, -1). \quad \diamond$$

Exempel 2.12. Genom punkten $P = (-1, 3)$ dras en linje parallell med vektorn $\mathbf{u} = (2, -1)$. Var skär denna linjen $y = x - 1$?

Lösning. Kalla skärningspunkten Q.



Eftersom $\overrightarrow{PQ}$ är parallell med $\mathbf{u}$ finns ett tal t med $\overrightarrow{PQ} = t\,\mathbf{u}$ eller $Q = P + t\,\mathbf{u} = (-1, 3) + t(2, -1) = (2t - 1, 3 - t)$. Men att Q ligger på linjen $y = x - 1$ betyder att $3 - t = (2t - 1) - 1$. Denna ekvation har lösningen (Räkna själv!) $t = \frac{5}{3}$. Alltså är $Q = (-1, 3) + \frac{5}{3}(2, -1) = (\frac{7}{3}, \frac{4}{3})$. $\diamond$

Vi har alltså sett att två punkter P och Q bestämmer en vektor $\overrightarrow{PQ}$ som beräknas genom

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P\,.$$

Ett annat sätt att skriva detta är

$$P + \overrightarrow{PQ} = Q\,.$$

Om vi startar i punkten P och går längs vektorn $\overrightarrow{PQ}$, så hamnar vi i punkten Q.

Övning 2.14. Antag att $\overrightarrow{OP} = (2, 3)$, $\overrightarrow{OQ} = (3, 4)$. För vilken punkt R gäller det att $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$?

Övning 2.15. En triangel har hörn i $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, 5, 7)$ och $C = (2, -9, -5)$. Bestäm vektorerna $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{BC}$ och $\mathbf{w} = \overrightarrow{CA}$.

Övning 2.16. Vad är mittpunkten på sträckan vars ändpunkter är

(a) $(1, 2, 3)$ och $(3, 0, -1)$, (b) (x, y, z) och (x_1, y_1, z_1)?

Övning 2.17. Undersök om punkterna $(1, 2, 3)$, $(-2, 1, 4)$ och $(4, 3, 2)$ bildar hörn i en triangel.

Övning 2.18. En triangel har hörnen $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$ och $(3, -2, 2)$. Bestäm triangelns tyngdpunkt.

Övning 2.19. Bestäm avståndet mellan följande par av punkter

(a) $(1, 0), (0, 1)$; (b) $(1, 0, 0), (0, 0, 1)$; (c) $(1, 1, 2), (2, 1, 1)$.

Övning 2.20. Visa att punkterna $(1, 1, -1), (1, -1, 1)$ och $(-1, 1, 1)$ bildar hörn i en liksidig triangel.

Övning 2.21. Bestäm en punkt i planet så att den tillsammans med $(0, 0)$, $(1, 1)$ och $(2, -3)$ bildar en parallellogram. *(OBS: Det finns tre olika lösningar till uppgiften.)*

Övning 2.22. Undersök om punkterna $(1, 1, 2), (0, 3, 2), (2, 2, 1)$ och $(1, 4, 1)$ är hörn i en parallellogram.

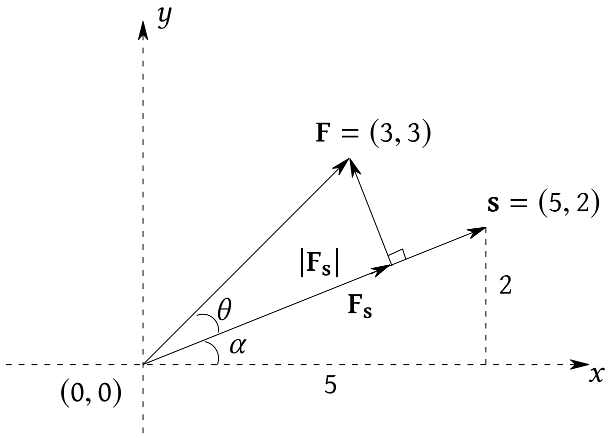
Övning 2.23. Det finns tre parallellogrammer som har hörn i punkterna $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 4)$ och $(2, 3, 5)$. Bestäm diagonalernas skärningspunkt i dessa tre parallellogrammer.

3 Skalärprodukt

I det här avsnittet skall vi behandla problem som har att göra med vinklar mellan vektorer. Ett viktigt tillämpningsområde är fysiken och vi börjar med ett sådant exempel.

Exempel 3.1. En partikel rör sig under påverkan av kraften $(3, 3)$ rätlinjigt från origo till punkten $(5, 2)$ i ett ortonormerat koordinatsystem. Hur stort arbete uträttas? (SI-enheter)

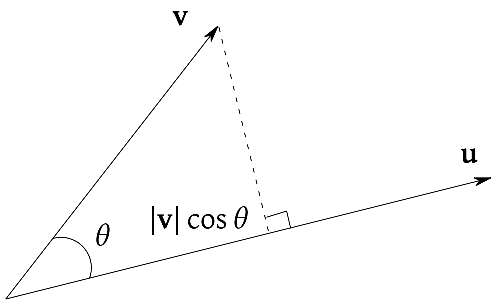
Lösning (via trigonometri). Det uträttade arbetet är produkten av vägen och kraftens projektion i vägens riktning; $W = |\mathbf{F_s}| \cdot |\mathbf{s}|$.



Vektorn $(3,3)$ bildar $45°$:s vinkel med x-axeln så $\theta = 45° - \alpha$. Vinkeln α uppfyller $\tan\alpha = 2/5$ så $\alpha = \arctan(2/5)$. Alltså är $|\mathbf{F_s}| = |\mathbf{F}|\cos\theta = \sqrt{9+9}\cos\theta = 3\sqrt{2}\cos\theta$. Vägen $\mathbf{s}$ har längden $|\mathbf{s}| = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$, och vi får $W = |\mathbf{F_s}| \cdot |\mathbf{s}| = 3\sqrt{2}\cos\theta\sqrt{29} = 21$ J. (Exakt! Kan du visa det?) ◇

Anmärkning 3.2. Observera att $W = 21 = 3\cdot 5 + 3\cdot 2$, d.v.s. arbetet är summan av produkterna av kraften och vägens x och y-koordinater. Detta är ingen tillfällighet, och ett av syftena med införandet av skalärprodukt är att visa att det alltid är så. ◇

Efter dessa preludier är det dags att definiera skalärprodukten mellan två vektorer i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$. Med *vinkeln* θ mellan vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, båda skilda från $\mathbf{0}$, menas den minsta vinkel som bildas då $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ placeras så att de börjar i samma punkt.



Definition 3.3. *Skalärprodukten* av vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta\,,$$

där θ är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, $0° \le \theta \le 180°$. Om $\mathbf{u}$ eller $\mathbf{v}$ är $\mathbf{0}$, så är $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0$.

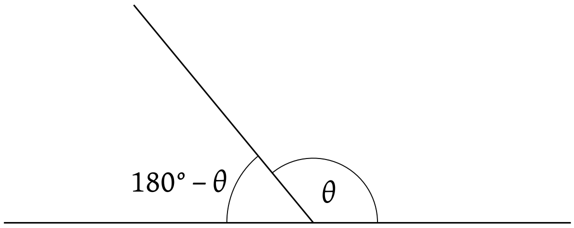
Observera att definitionen är gjord så att $W = \mathbf{F} \bullet \mathbf{s}$ i förra exemplet.

Cosinus av trubbiga vinklar

Vinkeln mellan vektorer behöver inte vara spetsig, vilket innebär att den definition av $\cos\theta$ som utgår från sidlängderna i rätvinkliga trianglar inte duger. För att kunna införa skalärprodukten av vektorer med en icke-spetsig vinkel emellan måste definitionen av cosinus utvidgas:

- Om $\theta = 0°$, så definieras $\cos 0° = 1$.

- Om $0^\circ < \theta < 90^\circ$, så kan värdet på cosinus beräknas m.h.a. en rätvinklig triangel med θ som en av dess inre vinklar, d.v.s. $\cos\theta = \frac{\text{närliggande katet}}{\text{hypotenusan}}$.
- Om $\theta = 90^\circ$, så definieras $\cos 90^\circ = 0$.
- Om $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$, så definieras cos:värdet via supplementvinkeln som då blir spetsig, nämligen $\cos\theta = -\cos(180^\circ - \theta)$. *(Lägg märke till minustecknet framför* cos *på HL!)*



Den här utvidgningen utgår från hur de trigonometriska funktionerna definieras för godtyckliga vinklar m.h.a. enhetscirkeln. Vi ska återkomma till dessa senare i kursen (Kapitel 3 i den andra Blomqvistboken).

Övning 3.1. Beräkna (utan miniräknare)

(a) $\cos 0^\circ$; (b) $\cos 45^\circ$; (c) $\cos 90^\circ$; (d) $\cos 120^\circ$; (e) $\cos 180^\circ$.

Övning 3.2. Bestäm vinkeln $\theta \in [0^\circ, 180^\circ]$ (utan miniräknare) då

(a) $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; (b) $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; (c) $\cos\theta = 0$; (d) $\cos\theta = -1$; (e) $\cos\theta = 1$.

Övning 3.3. Använd gärna miniräknare för att beräkna

(a) $\cos 25^\circ$; (b) $\cos 155^\circ$; (c) $\cos^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right)$; (d) $\arccos\left(\dfrac{-3}{5}\right)$.

Förklara sambandet mellan svaren på (a) och (b), respektive mellan svaren på (c) och (d).

Räkneregler

(i) $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \bullet \mathbf{u}$;
(ii) $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{u}$ (*kommutativitet*);
(iii) $(t\mathbf{u}) \bullet \mathbf{v} = t(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v})$;
(iv) $\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} + \mathbf{u} \bullet \mathbf{w}$ (*distributivitet*);

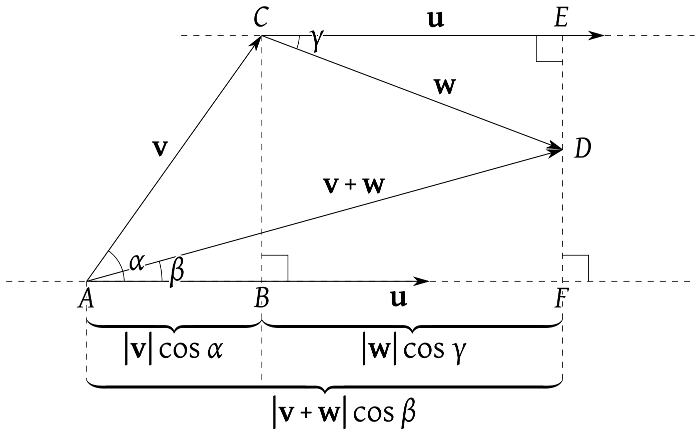
Bevis. Du bör själv övertyga dig om att (i) och (ii) gäller.

Låt oss betrakta (iii). Ifall det reella talet t är positivt eller $t = 0$, så ser man direkt ur skalärproduktens definition att likheten är sant. Man behöver notera att $|t\mathbf{u}| = t|\mathbf{u}|$ medan vinklarna mellan $t\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ samt mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är lika (då $t > 0$). Om t däremot är negativt, så gäller det att $|t\mathbf{u}| = |t|\,|\mathbf{u}| = -t|\mathbf{u}|$. Observera att vinklarna mellan $t\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ samt mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ inte är lika. De är nämligen supplementvinklar (d.v.s. om den ena är θ, så är den andra $180^\circ - \theta$).

$$VL_{(\text{iii})} = (t\mathbf{u}) \bullet \mathbf{v} = |t\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\theta = -t|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\theta, \qquad \text{medan}$$
$$HL_{(\text{iii})} = t(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}) = t\big(|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos(180^\circ - \theta)\big) = t\big(|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|(-\cos\theta)\big) = -t|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\theta.$$

Således $VL_{(iii)} = HL_{(iii)}$ även ifall $t < 0$. Lägg märke till att det har använts här att cos:värden av supplementvinklar är lika stora fast med motsatta tecken.

Nu ska vi motivera den distributiva lagen m.h.a. ortogonala projektioner. Låt α beteckna vinkeln mellan **u** och **v**, β mellan **u** och $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ och γ mellan **u** och **w**. Antag att både α och γ är spetsiga (vilket medför att β också är spetsig). Då kan vektorerna åskådliggöras med följande figur:



Genom att använda sig av trigonometrin för rätvinkliga trianglar får man att

$$\begin{aligned} |AB| &= |\mathbf{v}| \cos\alpha && \text{(i triangeln } ABC\text{)}, \\ |CE| &= |\mathbf{w}| \cos\gamma && \text{(i triangeln } CED\text{)}, \\ |AF| &= |\mathbf{v} + \mathbf{w}| \cos\beta && \text{(i triangeln } AFD\text{)}. \end{aligned}$$

Fyrhörningen $BFEC$ är egentligen en rektangel, så sidorna BF och CE är lika långa. Därför är $|AF| = |AB| + |BF| = |AB| + |CE|$, d.v.s.

$$|\mathbf{v} + \mathbf{w}| \cos\beta = |\mathbf{v}| \cos\alpha + |\mathbf{w}| \cos\gamma \,.$$

När man nu multiplicerar båda leden av denna ekvation med $|\mathbf{u}|$, så får man

$$|\mathbf{u}|\, |\mathbf{v} + \mathbf{w}| \cos\beta = |\mathbf{u}|\, |\mathbf{v}| \cos\alpha + |\mathbf{u}|\, |\mathbf{w}| \cos\gamma \,,$$

vilket enligt definitionen av skalärprodukten är ekvivalent med $\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} + \mathbf{u} \bullet \mathbf{w}$. På så sätt har vi bevisat den distributiva lagen för skalärprodukt under förutsättningen att vinklarna mellan **u** och **v**, respektive **u** och **w** är spetsiga.

Om α och/eller γ är trubbig(a), så kan den distributiva lagen visas på ett analogt sätt, fast figuren behöver anpassas och man behöver ta hänsyn till att cosinus får negativa värden för trubbiga vinklar. En sådan modifiering av beviset överlämnas till den käre läsaren som övning. □

Påstående 3.4. *Låt* **u** *och* **v** *vara två nollskilda vektorer och låt θ beteckna minsta vinkeln mellan dem. Då gäller att*

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} > 0 &\quad \textit{om och endast om} \quad \theta \textit{ är spetsig (eller noll)}. \\ \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0 &\quad \textit{om och endast om} \quad \theta \textit{ är rät}. \\ \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} < 0 &\quad \textit{om och endast om} \quad \theta \textit{ är trubbig (eller rak)}. \end{aligned}$$

Dessutom gäller att

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} &= |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| && \textit{om och endast om} \quad \textit{vektorerna } \mathbf{u} \textit{ och } \mathbf{v} \textit{ har samma riktning.} \\
\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} &= -|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| && \textit{om och endast om} \quad \textit{vektorerna } \mathbf{u} \textit{ och } \mathbf{v} \textit{ har motsatt riktning.} \\
-|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| < \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} &< |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}| && \textit{om och endast om} \quad \textit{vektorerna } \mathbf{u} \textit{ och } \mathbf{v} \textit{ inte är parallella.}
\end{aligned}
$$

Bevis. Påståendet följer från skalärproduktens definition, d.v.s., $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\theta$, när man tar hänsyn till vilka värden som $\cos\theta$ antar för noll-, spetsiga, räta, trubbiga, resp. raka vinklar. □

För att praktiskt räkna med skalärprodukt behöver vi dock veta vad $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$ blir i koordinater.

Sats 3.5. *Låt $\mathbf{u} = (x, y, z)$ och $\mathbf{v} = (x', y', z')$ i ett ortonormerat koordinatsystem i rummet. Då gäller*

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = xx' + yy' + zz'\,.$$

I planet gäller $(x, y) \bullet (x', y') = xx' + yy'$.

Bevis. Eftersom basen är ortonormerad gäller $\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \bullet \mathbf{e}_3 = 1$ och $\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{e}_3 = 0$. Så

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} &= (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3) \bullet (x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2 + z'\mathbf{e}_3) \\
&= xx'\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{e}_1 + yy'\mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{e}_2 + zz'\mathbf{e}_3 \bullet \mathbf{e}_3 \\
&\quad + (xy' + yx')\,\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{e}_2 + (xz' + x'z)\,\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{e}_3 + (yz' + y'z)\,\mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{e}_3 \\
&= xx' + yy' + zz'\,.
\end{aligned}
$$

□

Exempel 3.1 (Fortsättning från sid 13)**.** *Alternativ lösning* via skalärprodukten: Vi har

$$W = |\mathbf{F}|\,|\mathbf{s}|\cos\theta \overset{\text{Def 3.3}}{=} \mathbf{F} \bullet \mathbf{s} = (3, 3) \bullet (5, 2) \overset{\text{Sats 3.5}}{=} 3 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 21.$$

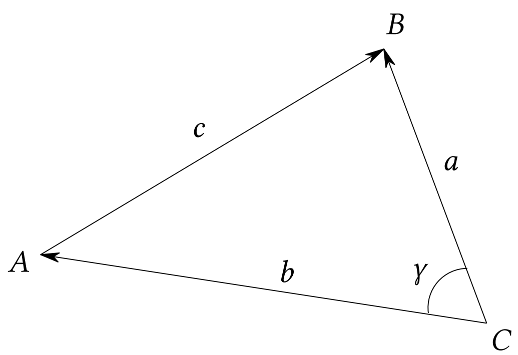
◇

Geometriska tillämpningar

Exempel 3.6. Bestäm vinkeln mellan vektorerna $\mathbf{u} = (1, 2, 2)$ och $\mathbf{v} = (-2, 1, -2)$.

Lösning. Vi har $|\mathbf{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$, $|\mathbf{v}| = \sqrt{(-2^2) + 1^2 + (-2)^2} = 3$ och $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 1(-2) + 2 \cdot 1 + 2(-2) = -4$. Eftersom $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta$ får vi $\cos\theta = -4/(3 \cdot 3) \approx -0{,}4444$ och $\theta \approx 116{,}4^\circ$. ◇

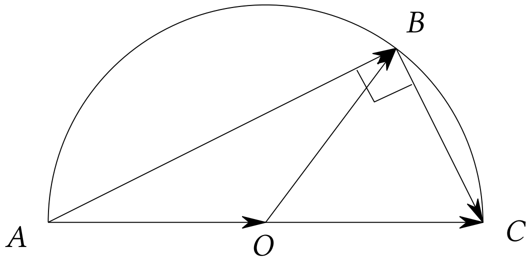
Exempel 3.7 (Cosinusatsen)**.** I en triangel gäller $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.



Bevis. Eftersom $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$ och $\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CB} = ab\cos\gamma$ så är

$$\begin{aligned} c^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB} &= (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) \bullet (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) \\ &= \overrightarrow{CB} \bullet \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CB} \bullet \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CA} \\ &= |\overrightarrow{CB}|^2 - 2\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CB} + |\overrightarrow{CA}|^2 = a^2 - 2ab\cos\gamma + b^2 . \qquad \diamond \end{aligned}$$

Exempel 3.8 (Thales sats)**.** Periferivinkeln i en halvcirkel är rät.



Bevis. Vi skall visa att $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BC} = 0$. Ty $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ och $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$, så

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) \bullet (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) \\ &= \overrightarrow{AO} \bullet \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AO} \bullet \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \bullet \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \bullet \overrightarrow{OB}. \end{aligned}$$

Eftersom $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$, får vi att

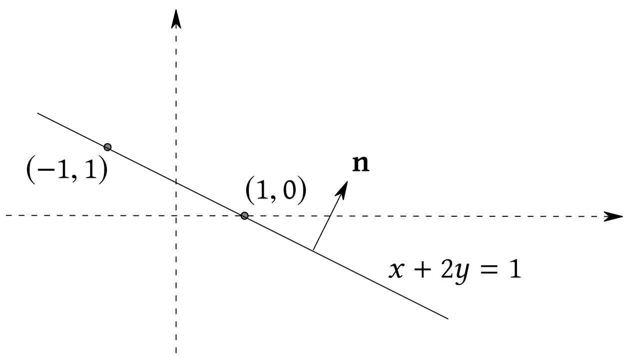
$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} \bullet \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OC} \bullet \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \bullet \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \bullet \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OC}|^2 - |\overrightarrow{OB}|^2 = r^2 - r^2 = 0,$$

där $r = |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$ betecknar cirkelns radie. $\diamond$

Exempel 3.9. Om $\mathbf{v} = (x, y)$ i en ON-bas, så är $\mathbf{u} = (y, -x)$ vinkelrät mot $\mathbf{v}$.

Detta ser man helt enkelt genom att beräkna $\mathbf{v} \bullet \mathbf{u} = xy - yx = 0$ $\diamond$

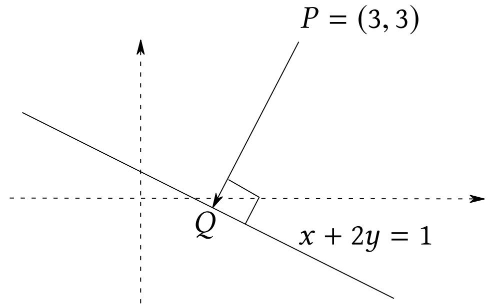
Exempel 3.10. Bestäm en normalvektor till linjen $x + 2y = 1$. (En *normalvektor* är en vektor som är vinkelrät mot linjen.)



Lösning. Punkterna $(1, 0)$ och $(-1, 1)$ ligger på linjen, så $\mathbf{v} = (1, 0) - (-1, 1) = (2, -1)$ är en riktningsvektor till linjen. Men om $\mathbf{n} = (1, 2)$ är $\mathbf{n} \bullet \mathbf{v} = (1, 2) \bullet (2, -1) = 2 - 2 = 0$, så $\mathbf{n}$ och $\mathbf{v}$ är vinkelräta. Alltså är $\mathbf{n} = (1, 2)$ en normalvektor. $\diamond$

Exempel 3.11. Bestäm avståndet från punkten $(3, 3)$ till linjen $x + 2y = 1$.

Lösning. Med avståndet d från en punkt P till en linje menas det kortaste av avstånden $|P - Q|$ då punkten Q ligger på linjen. Detta antas då $\overrightarrow{PQ}$ är vinkelrät mot linjen. (Varför?)



Enligt förra exemplet är $(1, 2)$ vinkelrät mot den givna linjen, så $\overrightarrow{PQ} = t(1, 2)$ för något tal t. Men $Q = P + \overrightarrow{PQ} = (3 + t, 3 + 2t)$ som ligger på linjen om $(3 + t) + 2(3 + 2t) = 1$, d.v.s. om $t = -\frac{8}{5}$. Så $\overrightarrow{PQ} = -\frac{8}{5}(1, 2)$ och $d = |\overrightarrow{PQ}| = \frac{8}{5}\sqrt{1 + 4} = 8/\sqrt{5} \approx 3{,}13$.

Punkten Q kallas för *ortogonala projektionen* av P med avseende på linjen $x + 2y = 1$. $\diamond$

Exempel 3.12. Antag att en rät linje ges av ekvationen $ax + by = c$. Då är $\mathbf{n} = (a, b)$ en normalvektor till linjen. (Jämför gärna med Exempel 3.10)

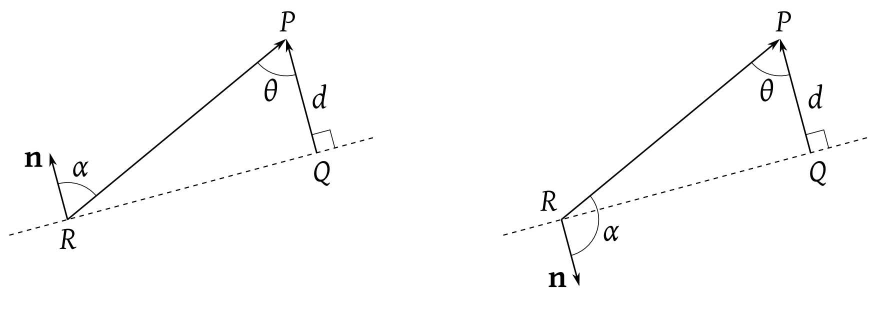
Bevis. Välj två godtyckliga punkter på linjen, t.ex., $P = (\frac{c}{a}, 0)$ och $Q = (0, \frac{c}{b})$. Vektorn $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$ har samma riktning som linjen och man behöver alltså hitta en vektor som är vinkelrät mot $\mathbf{v}$. Eftersom $\mathbf{v} = Q - P = (-\frac{c}{a}, \frac{c}{b})$, ser man direkt att $\mathbf{v} \bullet \mathbf{n} = -\frac{c}{a} \cdot a + \frac{c}{b} \cdot b = 0$. $\diamond$

Exempel 3.13 (Avståndsformeln)**.** Avståndet d från punkten $P = (x_P, y_P)$ till linjen $ax + by = c$ ges av

$$d = \frac{|ax_P + by_P - c|}{|(a, b)|}.$$

Bevis. Låt $R = (x_R, y_R)$ vara en godtycklig punkt på linjen, d.v.s. punktens koordinater uppfyller ekvationen $ax_R + by_R = c$. Låt Q vara den punkt på linjen som ligger närmast till P. Det innebär att $\overrightarrow{QP}$ är en normalvektor till linjen (jfr. Exempel 3.11). Således är $\overrightarrow{QP}$ parallell med vektorn $\mathbf{n} = (a, b)$ som bevisats vara en normalvektor i Exempel 3.12.

Med hjälp av trigonometrin ser man att $|\overrightarrow{QP}| = |\overrightarrow{RP}| \cos\theta$, där θ är vinkeln mellan vektorerna $\overrightarrow{QP}$ och $\overrightarrow{RP}$ (se figuren nedan). Alternativt kan man bestämma θ m.h.a. vinkeln α som ligger mellan $\mathbf{n}$ och $\overrightarrow{RP}$. Nämligen gäller att $\theta = \alpha$ ifall α är spetsig, medan $\theta = 180^\circ - \alpha$ ifall α är trubbig. I båda fallen får man att $\cos\theta = |\cos\alpha|$.



$$\overrightarrow{RP} \bullet \mathbf{n} = |\overrightarrow{RP}|\,|\mathbf{n}| \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{RP} \bullet \mathbf{n}}{|\overrightarrow{RP}|\,|\mathbf{n}|} = \frac{a(x_P - x_R) + b(y_P - y_R)}{|\overrightarrow{RP}|\,|(a,b)|}$$
$$= \frac{ax_P + by_P - (ax_R + by_R)}{|\overrightarrow{RP}|\,|(a,b)|} = \frac{ax_P + by_P - c}{|\overrightarrow{RP}|\,|(a,b)|}$$

Avståndet till linjen är $d = |\overrightarrow{QP}|$. Således

$$d = |\overrightarrow{RP}| \cos\theta = |\overrightarrow{RP}|\,|\cos\alpha| = |\overrightarrow{RP}| \frac{|ax_P + by_P - c|}{|\overrightarrow{RP}|\,|(a,b)|} = \frac{|ax_P + by_P - c|}{|(a,b)|} \qquad \diamond$$

Tillämpar vi denna formel på Exempel 3.11, får vi

$$d = \frac{|3 + 2 \cdot 3 - 1|}{\sqrt{1+4}} = \frac{8}{\sqrt{5}}\,.$$

Exempel 3.14. Om $\mathbf{v} = (x, y, z) = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ i en ortonormerad bas så är $x = \mathbf{v} \bullet \mathbf{e}_1$, $y = \mathbf{v} \bullet \mathbf{e}_2$ och $z = \mathbf{v} \bullet \mathbf{e}_3$.

Bevis. Vi ska bevisa bara den första likheten, eftersom de andra likheterna bevisas analogt.

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{e}_1 = (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3) \bullet \mathbf{e}_1 = x\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{e}_1 + z\mathbf{e}_3 \bullet \mathbf{e}_1 = x. \qquad \diamond$$

Övning 3.4. Vilka av följande par av vektorer är ortogonala?

(a) $(-1, 2, 2)$, $(2, 2, -1)$; (b) $(2, 1, 1)$, $(2, 1, -5)$; (c) $(1, 1, 1)$, $(2, -1, -1)$.

Övning 3.5. Bestäm vinkeln mellan vektorerna

(a) $\mathbf{u} = (2, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (1, -1, 0)$; (b) $\mathbf{u} = (-1, 2, 2)$, $\mathbf{v} = (1, 1, 4)$;
(c) $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$.

Övning 3.6. Bestäm vinkeln mellan $\mathbf{a}$ och $2\mathbf{b} - \mathbf{a}$ då $\mathbf{a} = (2, -3, 4)$ och $\mathbf{b} = (3, 4, 0)$.

Övning 3.7. Låt $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ vara tre vektorer i planet sådana att $|\mathbf{u}| = 2$, $|\mathbf{v}| = 4$ och $|\mathbf{w}| = 3$, vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är $120°$ och vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{w}$ är $30°$. Beräkna

(a) $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$; (b) $\mathbf{u} \bullet \mathbf{w}$; (c) $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}$; (d) $\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.

Övning 3.8. Två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ har längderna 3 respektive 2 och $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = -1$. Beräkna

(a) $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \bullet (2\mathbf{u} + \mathbf{v})$; (b) $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|$.

Övning 3.9. Bestäm en vektor som är vinkelrät mot

(a) $(2, -3)$; (b) $(3, 4, -2)$.

Övning 3.10. Bestäm t så att vektorerna $(t, 2t^2, 3t)$ och $(-1, 1, t)$ blir vinkelräta.

Övning 3.11. Kraften $(3, -4, 2)$ verkar på en kropp som rör sig rätlinjigt från punkten $(-1, 3, 2)$ till

(a) $(1, 4, 5)$; (b) $(-3, 2, 3)$; (c) $(0, 5, 3)$.

Beräkna ändringen i kroppens rörelseenergi.

Övning 3.12. Visa att $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = 4\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}$.

Övning 3.13. Vektorerna $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ har längderna 3, 4 och 2. Hur stor är vinkeln mellan $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$?

Övning 3.14. Låt $\mathbf{u}$ vara en fix vektor med $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ och antag att $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{u} \bullet \mathbf{w}$ för den specifika vektorn $\mathbf{u}$. Måste $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ då? Motivera ditt svar!

Övning 3.15. Antag att $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{u} \bullet \mathbf{w}$ för alla vektorer $\mathbf{u}$. Måste $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ då? Motivera ditt svar!

Övning 3.16. Två vektorer $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ har längderna 2 respektive 3 och vinkeln mellan dem är 60°. Bestäm vinkeln mellan $\mathbf{a}$ och $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

Övning 3.17. Två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ har samma längd. Vad kan du säga om vinkeln mellan $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ och $\mathbf{u} - \mathbf{v}$?

Övning 3.18. Bestäm koordinaterna av vektorn $\mathbf{v}$ i en ON-bas då $|\mathbf{v}| = 4$ l.e., vinkeln mellan $\mathbf{v}$ och $\mathbf{e}_1$ är 30°, vinkeln mellan $\mathbf{v}$ och $\mathbf{e}_2$ är 120° och vinkeln mellan $\mathbf{v}$ och $\mathbf{e}_3$ är 135°.

Övning 3.19. En triangel har hörnen $(2, 1, 3)$, $(-1, 4, 2)$ och $(0, 6, 5)$. Är triangeln rätvinklig?

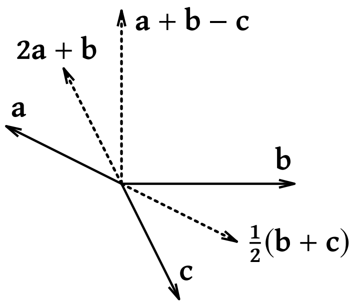
Övning 3.20. (a) Bestäm avståndet från punkten $(1, 2)$ till linjen $y = 5$.
(b) Bestäm avståndet från punkten $(1, 2)$ till linjen $x + y = 5$.

Övning 3.21. Visa att en triangels höjder skär varandra i en punkt.

Förslag till svar

Kapitel 1

1.



2. (a) & (b) $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, (c) $\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, (d) $-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, (e) $-\mathbf{e}_1$

3. (a) Med farten $\sqrt{40}$ m/s i riktning 341,6°, (b) 19,5°

4. Låt M vara mittpunkten på sträckan AB, så $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ enligt Exempel 1.8. Således $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \mathbf{0}$, vilket gör att punkterna P och M sammanfaller.

5 *(Svar)*. (a) $\overrightarrow{OR} = \frac{b}{a+b}\mathbf{u} + \frac{a}{a+b}\mathbf{v}$; (b) $\overrightarrow{OS} = \frac{p}{p-q}\mathbf{v} - \frac{q}{p-q}\mathbf{u}$;

5 *(Lösningsförslag)*. (a) $\overrightarrow{PR} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{PQ}$ och $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$.
Således $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OP} + \frac{a}{a+b}(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{OP} + \frac{a}{a+b}\overrightarrow{OQ}$.
(b) $\overrightarrow{PS} = \frac{p}{q}\overrightarrow{QS} = \frac{p}{q}(\overrightarrow{PS} - \overrightarrow{PQ})$, vilket medför att $\frac{p-q}{q}\overrightarrow{PS} = \frac{p}{q}\overrightarrow{PQ}$ och så $\overrightarrow{PS} = \frac{p}{p-q}\overrightarrow{PQ}$. Dessutom $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$. Således $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{OP} + \frac{p}{p-q}(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) = \frac{-q}{p-q}\overrightarrow{OP} + \frac{p}{p-q}\overrightarrow{OQ}$.

6. Antag att T är triangelns tyngdpunkt. Då är $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ enligt Exempel 1.10. Således $\overrightarrow{TP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OT} = \mathbf{0}$, vilket gör att punkterna P och T sammanfaller.

7. Enligt Övning 1.5 gäller att $\overrightarrow{OD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$. Om P betecknar tyngdpunkten av triangeln DEF, så får man ur Exempel 1.10 att

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}) &= \frac{1}{3}\left(\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right) + \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}\right) + \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}\right)\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \overrightarrow{OM},\end{aligned}$$

där M är tyngdpunkten av triangeln ABC. Således $\overrightarrow{MP} = \mathbf{0}$ och tyngdpunkterna sammanfaller.

8. (a) Antag att M_{AB} och M_{CD} är mittpunkterna på sträckorna AB respektive CD. Då blir

$$\overrightarrow{OM_{AB}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \quad \text{och} \quad \overrightarrow{OM_{CD}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

Mittpunkten av sträckan $M_{AB}M_{CD}$ uppfyller

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM_{AB}} + \overrightarrow{OM_{CD}}) = \frac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})\right) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

(b) Det finns 3 olika kantpar: AB & CD, AC & BD, AD & BC. (Rita en figur!)
(c) Man får modifiera uträkningen av vektorn $\overrightarrow{OM}$ så att de andra två kantpar används, vilket kommer att ge samma uttryck för $\overrightarrow{OM}$.

Kapitel 2

1. (a) $(0, 4)$; (b) $(-3, -5)$; (c) $(9, -1)$; (d) $(8, -4)$. **2.** $(2, 2)$ **3.** $(1, 1)$
4. $x = -1, y = -2$, d.v.s., $\mathbf{u} = -\mathbf{v} - 2\mathbf{w}$ **5.** $(-8, 7, -9)$ **6.** $(1, -1, 2)$
7. $x = 3, y = -4$, d.v.s., $\mathbf{u} = 3\mathbf{v} - 4\mathbf{w}$ **8.** Nej **9.** $a = -4$
10. (a) $t = 0$ eller $t = 2$; (b) $t = 1$; (c) $t = 3$ **11.** (a) $\sqrt{14}$; (b) $\sqrt{3}$; (c) 3
12. $\mathbf{u} = (\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ eller $\mathbf{u} = (\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3})$
13. (a) $6\sqrt{3}$ N i riktningen $(1, 1, 1)$, (b) 8,70 N i 28,3° med avseende på ö-axeln
14. $R = (5, 7)$ **15.** $\mathbf{u} = (2, 3, 4), \mathbf{v} = (-1, -14, -12), \mathbf{w} = (-1, 11, 8)$
16. (a) $(2, 1, 1)$; (b) $(\frac{x+x_1}{2}, \frac{y+y_1}{2}, \frac{z+z_1}{2})$
17. Nej, punkterna ligger i en linje. **18.** $(2, 1, 2)$ **19.** $\sqrt{2}$ i alla tre fallen
20. Avståndet mellan varje par av punkter är $\sqrt{2}$ l.e., vilket gör att triangeln är liksidig.
21. $(3, -2)$ eller $(1, -4)$ eller $(-1, 4)$ **22.** Ja
23. $(1, \frac{5}{2}, \frac{7}{2})$ eller $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 4)$ eller $(\frac{3}{2}, 3, \frac{9}{2})$

Kapitel 3

1. (a) 1; (b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; (c) 0; (d) $\frac{-1}{2}$; (e) -1.
2. (a) $\theta = 135°$; (b) $\theta = 30°$; (c) $\theta = 90°$; (d) $\theta = 180°$; (e) $\theta = 0°$;
3. (a) 0,9063; (b) $-0{,}9063$; (c) 53,1°; (d) $126{,}9° = 180° - 53{,}1°$.
4. Alla är ortogonala **5.** (a) 90°; (b) 45°; (c) $\cos^{-1}(\frac{5}{7}) \approx 44{,}4°$
6. $\cos^{-1}\left(\frac{-41}{3\sqrt{493}}\right) \approx 128{,}0°$ **7.** (a) -4; (b) $3\sqrt{3}$; (c) 0 eller $-6\sqrt{3}$; (d) $-4 + 3\sqrt{3}$
8. (a) 15; (b) $\sqrt{11}$ **9.** T.ex. (a) $(3, 2)$; (b) $(0, 1, 2)$. Allmänt: (a) $(3k, 2k)$, där $k \in \mathbb{R}$; (b) $(x, y, 1{,}5x + 2y)$, där $x, y \in \mathbb{R}$
10. $t = 0$ eller $t = \frac{1}{5}$ **11.** (a) 8 J; (b) 0 J; (c) -3 J
12.
$$\begin{aligned}|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 &= \big((\mathbf{u}+\mathbf{v}) \bullet (\mathbf{u}+\mathbf{v})\big) - \big((\mathbf{u}-\mathbf{v}) \bullet (\mathbf{u}-\mathbf{v})\big)\\ &= \big(\mathbf{u} \bullet \mathbf{u} + 2\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} + \mathbf{v} \bullet \mathbf{v}\big) - \big(\mathbf{u} \bullet \mathbf{u} - 2\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} + \mathbf{v} \bullet \mathbf{v}\big) = 4\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}.\end{aligned}$$
13. $\cos^{-1}(\frac{-21}{24}) \approx 151{,}0°$
14. Nej. Likheten $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{u} \bullet \mathbf{w}$ är ekvivalent med $\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = 0$, så det räcker att välja två skilda vektorer $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ sådana att vektorn $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ är vinkelrät mot den givna vektorn $\mathbf{u}$.
15. Ja. Likheten $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{u} \bullet \mathbf{w}$ är ekvivalent med $\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v}-\mathbf{w}) = 0$. Sätter man $\mathbf{u} = \mathbf{v}-\mathbf{w}$, så får man att $|\mathbf{v} - \mathbf{w}|^2 = 0$, vilket innebär att $\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{0}$ och så $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.
16. $\cos^{-1}\left(\frac{7}{2\sqrt{19}}\right) \approx 36{,}6°$ **17.** Den är 90°. **18.** $\mathbf{v} = (2\sqrt{3}, -2, -2\sqrt{2})$
19. Ja, vinkeln vid $(-1, 4, 2)$ är rät. **20.** (a) 3 l.e.; (b) $\sqrt{2}$ l.e.
21. Låt K beteckna skärningspunkten av höjderna dragna från hörnet A respektive från hörnet B. Då är $\overrightarrow{AK} \perp \overrightarrow{BC}$ samt $\overrightarrow{BK} \perp \overrightarrow{AC}$. Om man visar att $\overrightarrow{CK}$ är vinkelrät mot sidan $\overrightarrow{AB}$, så innebär det att även den tredje höjden går igenom punkten K och så blir K gemensam skärningspunkt av alla höjderna. Eftersom $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ och $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BK}$, så är

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CK} \bullet \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{CK} \bullet \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK} \bullet \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BK}) \bullet \overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AK}) \bullet \overrightarrow{CB}\\ &= \overrightarrow{CB} \bullet \overrightarrow{AC} + \underbrace{\overrightarrow{BK} \bullet \overrightarrow{AC}}_{=0} + \underbrace{\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CB}}_{=-\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{CB}} + \underbrace{\overrightarrow{AK} \bullet \overrightarrow{CB}}_{=0} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{CK} \perp \overrightarrow{AB}\end{aligned}$$