1 Övningstenta NBAM00-1

1. Förenkla med hjälp av potenslagarna

$$\frac{-6(ab^2)^3c^2(-2b^2c^{-1})^{-1}}{(abc)^2(-(1/3)ab^{-2})^{-3}}$$

(6p)

Lösning:

$$\frac{-6(ab^2)^3c^2(-2b^2c^{-1})^{-1}}{(abc)^2(-(1/3)ab^{-2})^{-3}} = \frac{-6a^3b^6c^2(-1/2)b^{-2}c}{a^2b^2c^2(-1)3^3a^{-3}b^6} =$$

$$\frac{3a^3b^4c^3}{-a^{-1}b^8c^23^3} = \frac{-1}{9}a^4b^{-4}c.$$

2. Lös ekvationen $4 + \ln x = 2\ln 1 - \ln 3$.

(5p)

Lösning:

$$\ln x = -4 - \ln 3$$

(eftersom $ln1 = 0$). Ta e upphöjt till båda sidor:

$$x = e^{\ln x} = e^{-4-\ln 3} = e^{-4}\frac{1}{e^{\ln 3}} = \frac{e^{-4}}{3}.$$

3. $\sin v = 1/3$. Beräkna exakt $\cos v$ om

a. $0 < v < 90°$

b. $90° < v < 180°$.

(5p)

Lösning: Trigonometriska ettan ger

$$\cos^2 v + (1/3)^2 = 1.$$

$$\cos^2 v = 1 - 1/9 = 8/9, \cos v = \pm\sqrt{8/9}.$$

När $0 < v < 90°$ är $\cos v > 0$, så $\cos v = \sqrt{8/9}$. När $90° < v < 180°$ är $\cos v < 0$, så $\cos v = -\sqrt{8/9}$.

4. För vilka värden på x är vektorn $(1, x, x^2)$ vinkelrät mot vektorn $(2, 3, 1)$?

(5p)

Lösning: Skalärprodukten mellan de två vektorerna är

$$(1, x, x^2) \cdot (2, 3, 1) = x^2 + 3x + 2.$$

Vektorerna är alltså vinkelräta då $x^2 + 3x + 2 = 0$. $p - q$-formeln ger

$$x = -3/2 \pm \sqrt{(-3/2)^2 - 2} = -3/2 \pm 1/2,$$

dvs $x = -2$ eller $x = -1$.

5. Linjen L har ekvationen $4x + 3y + 3 = 0$. Punkten P har koordinaterna $(1, 1)$ (i ett standardkoordinatsystem).

a. Bestäm ekvationen för en linje L_2 genom P som är vinkelrät mot linjen L.

b. Beräkna koordinaterna för skärningspunkten mellan L och L_2.

c. Beräkna avståndet från P till linjen L.

(8p)

Lösning: L:s ekvation kan skrivas $y = -(4/3)x - 1$ och har alltså riktningskoefficienten $k = -(4/3)$. Om L_2 är vinkel rät mot L och har riktningskoefficienten k_2 måste $k_2(-4/3) = -1$, vilket ger $k_2 = 3/4$. L_2:s ekvation blir med enpunktsformeln

$$y - 1 = (3/4)(x - 1), y = (3/4)x + 1/4.$$

I skärningspunkten Q gäller $(3/4)x + 1/4 = -(4/3)x - 1$, vilket ger $x = -(3/5)$. Insättning i L:s ekvation ger $y = -(1/5)$. Q blir alltså $(-3/5, -1/5)$.

Slutligen blir avståndet från P till L avståndet mellan P och Q, dvs

$$\sqrt{(1 - (-3/5))^2 + (1 - (-1/5))^2} = \sqrt{100/25} = 2.$$

6. a. Bestäm en heltalslösning till ekvationen $x^3 + 5x^2 + 7x + 2 = 0$.

   b. Bestäm alla lösningar till ekvationen.

(8p)

Lösning: En heltalslösning x måste dela 2, så $x = \pm 1$ eller $x = \pm 2$. Inga positiva x kan lösa ekvationen så $x = -1$ eller $x = -2$. Insättning visar att $x = -2$ duger.

Enligt faktorsatsen måste då $p(x) = x^3 + 5x^2 + 7x + 2$ vara jämnt delbart med $(x + 2)$. Polynomdivision ger att $p(x) = (x + 2)(x^2 + 3x + 1)$. För att $p(x)$ skall vara 0 måste antingen $(x + 2) = 0$ eller $x^2 + 3x + 1 = 0$. Den sista ekvatione ger med $p - q$-formeln att $x = (-3 \pm \sqrt{5})/2$. De tre lösningarna blir därför $x = -2$, $x = (-3 + \sqrt{5})/2$ och $x = (-3 - \sqrt{5})/2$.

7. Mängden av ett radioaktivt preparat vid tiden t är $f(t) = ma^t$ där a är ett positivt tal.

   a. Vad är mängden vid tiden $t = 0$?

   b. Antag att mängden av preparatet vid tiden $t = 5$ är $m/3$. Vid vilken tid är mängden $m/2$?

(7p)

Lösning: $f(0) = ma^0 = m$. Om $f(5) = ma^5 = m/3$ får vi att $a^5 = 1/3$. Logaritmering ger

$$\ln a = \frac{1}{5}\ln(1/3).$$

Då blir om $f(t) = m/2$

$$a^t = 1/2.$$

Logaritmering ger att

$$t \ln a = \ln(1/2),$$

så

$$t = \frac{\ln 1/2}{(1/5)\ln(1/3)} = 5\frac{-\ln 2}{-\ln 3} = 5\frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

8. Linjen L har ekvationen $ax + by + c = 0$. P och Q är två (olika) punkter på L. Visa att vektorn $\vec{PQ}$ är vinkelrät mot vektorn (a, b).

(6p)

Säg att $P = (x_0, y_0)$ och $Q = (x_1, y_1)$. Då blir $\vec{PQ} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$, och skalärprodukten

$$\vec{PQ} \cdot (a, b) = ax_1 + by_1 - (ax_0 + by_0).$$

Men eftersom P och Q uppfyller linjens ekvation gäller $ax_0 + by_0 = -c$ och $ax_1 + by_1 = -c$. Alltså får vi

$$\vec{PQ} \cdot (a, b) = -c - (-c) = 0,$$

så vektorerna är vinkelräta.