Matematiska vetenskaper
Göteborgs universitet

Lösningsförslag till tentamen
2018-11-01, 8:30–12:30

NBAM00: Naturvetenskapligt basår – Matematik, del 1

Uppgift 1. (a) Potenslagarna medför att

$$\frac{4\,(x^2y^{-1})\,(z^{1/2}y^{1/3})^6}{2^3\,\sqrt{x^3}\,y^{-2}\,(\sqrt[3]{z})^8} = \frac{4x^2y^{-1}z^{6/2}y^{6/3}}{8x^{3/2}y^{-2}z^{8/3}} = \frac{x^2y^{-1}z^3y^2}{2x^{3/2}y^{-2}z^{8/3}} = \frac{x^{2-(3/2)}y^{-1+2-(-2)}z^{3-(8/3)}}{2}$$
$$= \frac{x^{1/2}\,y^3\,z^{1/3}}{2} = \frac{\sqrt{x}\,y^3\,\sqrt[3]{z}}{2}.$$

(b)

$$\frac{\frac{3}{4}-\frac{4}{3}}{\frac{5}{2}-\frac{5}{6}} = \frac{\frac{9}{12}-\frac{16}{12}}{\frac{15}{6}-\frac{5}{6}} = \frac{\frac{9-16}{12}}{\frac{15-5}{6}} = \frac{\frac{-7}{12}}{\frac{10}{6}} = \frac{(-7)\cdot 6}{12\cdot 10} = \frac{(-7)\cdot 1}{2\cdot 10} = \frac{-7}{20}.$$

Uppgift 2. (a) Enligt definitionen av skalärprodukten är $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\theta$, där θ är vinkeln mellan vektorerna. När man sätter in de givna detaljerna, så fås att

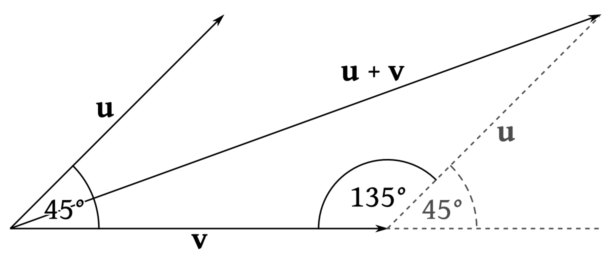
$$10\sqrt{2} = 4\cdot 5\cdot\cos\theta \quad\Leftrightarrow\quad \frac{10\sqrt{2}}{20} = \cos\theta \quad\Leftrightarrow\quad \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad\Rightarrow\quad \theta = 45^\circ.$$

(b) Via skalärprodukten:

$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u}+\mathbf{v})\bullet(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{u}\bullet\mathbf{u}+\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}+\mathbf{v}\bullet\mathbf{u}+\mathbf{v}\bullet\mathbf{v}$$
$$= |\mathbf{u}|^2 + 2\mathbf{u}\bullet\mathbf{v} + |\mathbf{v}|^2 = 16 + 20\sqrt{2} + 25 = 41 + 20\sqrt{2}$$

Således är $|\mathbf{u}+\mathbf{v}| = \sqrt{41+20\sqrt{2}}$ l.e.

(b) Via trigonometrin (cosinussatsen): När vektorn $\mathbf{u}$ parallellförflyttas så att dess ände hamnar på spetsen av vektorn $\mathbf{v}$, då fås vektorn $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ genom att koppla $\mathbf{v}$:s ände med $\mathbf{u}$:s spets. Då uppstår en triangel med sidlängderna $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$ och $|\mathbf{u}+\mathbf{v}|$ och vinkeln 135° (se figuren nedan).



Längderna av två sidor är givna (4 l.e. och 5 l.e.) och mellanliggande vinkeln har beräknats (135°), så cosinussatsen kan utnyttjas för att beräkna längden av den tredje sidan.

$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 = 4^2+5^2-2\cdot 4\cdot 5\cos 135^\circ = 41-40\cdot\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = 41+20\sqrt{2} \quad\Rightarrow\quad |\mathbf{u}+\mathbf{v}| = \sqrt{41+20\sqrt{2}}\text{ l.e.}$$

Uppgift 3 (Förutsatt att vinkeln är spetsig)**.** Antag att v är en (icke-rät) vinkel i en rätvinklig triangel. Låt a beteckna motstående katet, b närliggande katet och c hypotenusan i triangeln. Enligt Pythagoras sats är $a^2 + b^2 = c^2$. Enligt definitionen av de trigonometriska funktionerna är

$$\sin^2 v + \cos^2 v = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1\,. \qquad \text{V.S.B.}$$

Uppgift 3 (För en godtycklig vinkel)**.** Låt P var den punkt på enhetscirkeln som svarar mot vinkeln v. Då är $\cos v$ x-koordinaten av punkten P, medan $\sin v$ är y-koordinaten av den punkten. Enhetscirkeln beskrivs av ekvationen $x^2 + y^2 = 1$. När man sätter in $x = \cos v$ och $y = \sin v$, så fås $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$. V.S.B.

Uppgift 4. (a) Den konstanta termen på VL är delbar med ±1 och ±2. Det innebär att ett av dessa tal är en lösning till ekvationen. Vilket tal det är upptäcks genom att pröva talen i ekvationen:

$$\begin{array}{ll}
x = 1: & 6\cdot 1^3 + 11\cdot 1^2 - 3\cdot 1 - 2 = 12 \neq 0 \quad\Rightarrow\quad x = 1 \text{ är ingen lösning} \\
x = -1: & 6\cdot(-1)^3 + 11\cdot(-1)^2 - 3\cdot(-1) - 2 = 6 \neq 0 \quad\Rightarrow\quad x = -1 \text{ är ingen lösning} \\
x = 2: & 6\cdot 2^3 + 11\cdot 2^2 - 3\cdot 2 - 2 = 87 \neq 0 \quad\Rightarrow\quad x = 2 \text{ är ingen lösning} \\
x = -2: & 6\cdot(-2)^3 + 11\cdot(-2)^2 - 3\cdot(-2) - 2 = 0 \quad\Rightarrow\quad x = -2 \text{ är en lösning}
\end{array}$$

Polynomdivision ger $(6x^3 + 11x^2 - 3x - 2) \div (x+2) = 6x^2 - x - 1$, så ekvationens VL kan faktoruppdelas

$$6x^3 + 11x^2 - 3x - 2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad (x+2)(6x^2 - x - 1) = 0.$$

För att hitta de resterande lösningarna så ska $6x^2 - x - 1 = 0$ lösas m.h.a. pq-formeln.

$$\begin{aligned}
6x^2 - x - 1 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x_{2,3} &= \frac{1}{12} \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{12}\right)^2 + \tfrac{1}{6}} = \frac{1}{12} \pm \sqrt{\tfrac{1}{144} + \tfrac{24}{144}} \\
&= \frac{1}{12} \pm \sqrt{\tfrac{25}{144}} = \frac{1}{12} \pm \frac{5}{12} = \begin{cases} \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \\ \frac{-4}{12} = \frac{-1}{3} \end{cases}
\end{aligned}$$

Den ursprungliga ekvationens rötter är -2, $\frac{1}{2}$ och $\frac{-1}{3}$.

(b) Kvadratroten är definierad endast för icke-negativa tal. Man ska alltså lösa olikheten $\frac{6-2x}{3x-15} \geq 0$. Täljaren har endast ett nollställe, nämligen $x = 3$, och nämnaren har också endast ett nollställe, nämligen $x = 5$. Man bestämmer för vilka x bråket blir icke-negativt m.h.a. teckentabellen:

x		3		5	
$6-2x$	+	0	-	-	+
$3x-15$	-	-	-	0	+
$\frac{6-2x}{3x-15}$	-	0	+	$\lightning$	-

I teckentabellen avläses att $D_f = [3, 5)$. Alternativt kan man skriva $D_f = \{x : 3 \leq x < 5\}$.

Uppgift 5. (a) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5^2$

(b) Riktningskoefficienten är $k = \frac{4-(-1)}{2-(-3)} = \frac{5}{5} = 1$. Enpunktsformeln ger $y - 4 = 1 \cdot (x-2)$, vilket förenklas till $y = x + 2$.

(c) Skärningspunkterna hittas genom att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = 5^2 \\ \qquad\qquad\qquad y = x+2 \end{cases} \Rightarrow \quad (x+1)^2 + ((x+2)-2)^2 = 25 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2x + 1 + x^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2 + 2x - 24 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 12 = 0$$

Enligt pq-formeln är

$$x_{1,2} = \frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 12} = \frac{-1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{48}{4}} = \frac{-1}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{-1}{2} \pm \frac{7}{2} = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$$

Motsvarande värden av y beräknas ur linjens ekvation

$$x_1 = 3 \quad \Rightarrow \quad y_1 = x_1 + 2 = 3 + 2 = 5 \qquad \text{och} \qquad x_2 = -4 \quad \Rightarrow \quad y_2 = x_2 + 2 = -4 + 2 = -2\,.$$

Linjen L skär cirkeln C i de två punkter vars koordinater är $(3, 5)$ och $(-4, -2)$.

Uppgift 6. lg är logaritmfunktionen med basen 10 och så $\lg 10 = \lg 10^1 = 1$. Med hjälp av logaritmlagarna förenklas ekvationen:

$$\begin{aligned} &2\lg(x-1) - \lg(7-x) = 1 - \lg 10 \quad \Leftrightarrow \quad \lg\big((x-1)^2\big) - \lg(7-x) = 1 - 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \lg\big((x-1)^2\big) = \lg(7-x) \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 = 7 - x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = 7 - x \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 6} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{25}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases} \quad . \end{aligned}$$

Eftersom man inte tagit fram några villkor för logaritmernas definitionsmängder, så måste kontroll av de funna lösningarna utföras:

$$\begin{aligned} x = 3: &\quad VL = 2\lg(3-1) - \lg(7-3) = 2\lg 2 - \lg 4 = \lg 2^2 - \lg 4 = 0 = HL \\ x = -2: &\quad VL = 2\lg(-2-1) - \lg(7-(-2)) = \lightning \text{ (odefinierad logaritm av ett negativt tal)} \end{aligned}$$

Således är $x = -2$ en falsk rot.

Ekvationen har endast en lösning, nämligen $x = 3$.

Uppgift 7. (a) Enligt trig:ettan är $\sin^2\alpha + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1$, vilket ger $\sin^2\alpha = \frac{5}{9}$ och så $\sin\alpha = \pm\sqrt{5/9}$. Eftersom α ligger i fjärde kvadranten, är värdet av $\sin\alpha$ negativt. Således

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\sqrt{5/9}}{2/3} = \frac{-\sqrt{5}/3}{2/3} = \frac{-\sqrt{5}}{2}\,.$$

(b) Värdet av $\sin\beta$ är negativt, vilket innebär att β ligger i tredje eller fjärde kvadranten. Dessutom är $\beta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ och så ligger β i andra eller tredje kvadranten. Dessa två villkor ihop ger att β ligger i tredje kvadranten. Funktionen sinus antar standardvärdet $\frac{1}{2}$ för vinkeln 30°, så

$$\beta = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ = \frac{210^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi = \frac{7}{12} \cdot 2\pi = \frac{7\pi}{6}\,.$$

Uppgift 8 (*Nya upplägget*). (a) Bråken förlängs med nämnarnas konjugat:

$$\begin{aligned}\frac{5+3i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}-\frac{2-6i}{2-i}\cdot\frac{2+i}{2+i} &= \frac{(5+3i)(1-i)}{1^2-i^2}-\frac{(2-6i)(2+i)}{2^2-i^2}\\ &= \frac{8-2i}{2}-\frac{10-10i}{5} = 4-i-(2-2i) = 2+i.\end{aligned}$$

Då ser man att realdelen är 2.

(b) Kvadratkomplettera VL:

$$\begin{aligned}VL &= \underbrace{z^2-2\cdot(1+2i)z+(1+2i)^2}-(1+2i)^2+2+16i\\ &= \big(z-(1+2i)\big)^2-(1+4i+4i^2)+2+16i = \big(z-(1+2i)\big)^2+5+12i.\end{aligned}$$

Ekvationen blir $\big(z-(1+2i)\big)^2=-5-12i$. Ansätt $z-(1+2i)=u+iv$, där u och v är reella tal. Då blir

$$(u+iv)^2=-5-12i \quad\Leftrightarrow\quad u^2+2iuv-v^2=-5-12i \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}u^2-v^2=-5 & \text{(Re)}\\ 2uv=-12 & \text{(Im)}\end{cases}$$

Man kan lägga till en tredje ekvation genom att beräkna absolutbeloppen av båda leden:

$$u^2+v^2=\sqrt{5^2+12^2}=13 \quad \text{(Abs)}$$

(Re) + (Abs) ger $2u^2=13-5=8$ och så $u^2=4$, d.v.s., $u=\pm 2$. Från ekvationen (Im) får man att $v=-6/u=-6/\pm 2=\mp 3$. Vi har alltså fått två lösningar:

$$\begin{aligned} z-(1+2i) &= 2-3i &&\Leftrightarrow && z=3-i \qquad \text{och}\\ z-(1+2i) &= -2+3i &&\Leftrightarrow && z=-1+5i\end{aligned}$$

Svar: Ekvationen löses av $z=3-i$ och $z=-1+5i$.

Uppgift 8 (*Gamla upplägget*). (a) Bryt ut de dominerande potenserna av x både i täljaren och i nämnaren:

$$\frac{4+x^2-3x^5}{4x^5+2x^3-x}=\frac{\cancel{x^5}}{\cancel{x^5}}\cdot\frac{\frac{4}{x^5}+\frac{1}{x^3}-3}{4+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^4}} \longrightarrow \frac{0+0-3}{4+0-0}=\frac{-3}{4} \quad \text{då } x\longrightarrow\infty.$$

(b) Eftersom $\frac{\sin v}{v}\longrightarrow 1$ då $v\longrightarrow 0$, förlänger man bråkets täljare och nämnare så att man får sådana uttryck:

$$\frac{\tan x^2}{x\sin 7x}=\frac{\sin x^2}{x\sin 7x\cos x^2}=\frac{1}{\cancel{x}\cos x^2}\cdot\frac{\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot\cancel{x^2}}{\frac{\sin 7x}{7x}\cdot 7\cancel{x}}=\frac{1}{7\cos x^2}\cdot\frac{\frac{\sin x^2}{x^2}}{\frac{\sin 7x}{7x}}\longrightarrow\frac{1}{7\cos 0}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{7} \quad \text{då } x\longrightarrow 0.$$