Matematiska vetenskaper
Göteborgs universitet

Lösningsförslag till tentamen
2019-01-04, 8:30–12:30

NBAM00: Naturvetenskapligt basår – Matematik, del 1

Uppgift 1. (a) Potenslagarna medför att

$$\frac{\left(\frac{4}{7}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{81}{4}\right)^{1/2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2}\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^{-3}} = \frac{\frac{7^2}{4^2}\cdot\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{4}}}{\frac{3^2}{2^2}\cdot\frac{7^3}{2^3}} = \frac{\frac{7^2\cdot 9}{4^2\cdot 2}}{\frac{3^2\cdot 7^3}{2^2\cdot 2^3}} = \frac{\cancel{7^2}\cdot\cancel{9}\cdot\cancel{2^2\cdot 2^3}}{\cancel{4^2\cdot 2}\cdot\cancel{3^2}\cdot 7^{\cancel{3}}} = \frac{1}{7}\,.$$

(b) Logaritmlagarna ger att

$$4\lg 2-\lg 0{,}8+\underbrace{\lg 1}_{=0}-\underbrace{\frac{\ln 2}{\ln 10}}_{=\lg 2} = 4\lg 2-\lg 0{,}8-\lg 2 = \lg\left(\frac{2^4}{0{,}8\cdot 2}\right) = \lg\left(\frac{16}{1{,}6}\right) = \lg 10 = 1\,.$$

Uppgift 2. (a) Enligt Pythagoras sats (eller avståndsformeln) är

$$|AB| = \sqrt{(2-5)^2+(3-3)^2+(6-2)^2} = \sqrt{9+0+16} = \sqrt{25} = 5 \text{ l.e.}$$

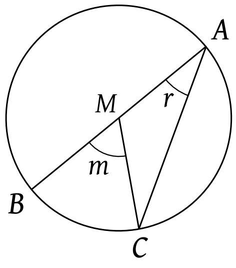
(b) $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = \text{”}B-A\text{”} = (2-5, 3-3, 6-2) = (-3, 0, 4)$.

(c) Skalärprodukten definieras av formeln $\mathbf{u}\bullet\mathbf{v} = |\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\cos\theta$. Från den kan man lösa ut $\cos\theta$ och således vinkeln θ.

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\bullet\mathbf{v} &= (2,-1,2)\bullet(-3,0,4) = 2\cdot(-3)+(-1)\cdot 0+2\cdot 4 = -6+0+8 = 2.\\ |\mathbf{u}| &= \sqrt{2^2+(-1)^2+2^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3 \text{ l.e.}\\ |\mathbf{v}| &= |AB| = 5 \text{ l.e.}\end{aligned}$$

När dessa värden sätts in i skalärproduktens definition, så fås att $2 = 3\cdot 5\cos\theta$, vilket ger att $\cos\theta = \frac{2}{15}$. Således är den efterfrågade vinkeln $\theta = \arccos\left(\frac{2}{15}\right)$.

Uppgift 3. Antag att A, B och C betecknar punkter på cirkeln enligt figuren nedan.



Triangeln AMC är likbent eftersom sidorna AM och MC har längden lika med cirkelns radie. Det innebär att vinklarna $\angle CAM$ och $\angle MCA$ är lika stora, alltså r. Vinkelsumman i en triangel är 180° och så kan man beräkna

$$|\angle AMC| = 180^\circ - |\angle CAM| - |\angle MCA| = 180^\circ - 2r.$$

Vinkeln $\angle AMB$ är rak, så vinklarna m och $\angle AMC$ är sidovinklar. Således

$$m = 180^\circ - |\angle AMC| = 180^\circ - (180^\circ - 2r) = 2r.$$

Svar: $m = 2r$.

Uppgift 4. (a) Eftersom $\frac{3}{2}$ är en av rötterna, är polynomet på VL delbart med $(x - \frac{3}{2})$. Polynomdivisionen ger att $(2x^3 + x^2 - 8x + 3) \div (x - \frac{3}{2}) = 2x^2 + 4x - 2$. Det återstår att lösa ekvationen $2x^2 + 4x - 2 = 0$ som ekvivalent kan skrivas $x^2 + 2x - 1 = 0$. Enligt p, q-formeln löses denna ekvation av $x = -1 \pm \sqrt{2}$. Den givna ekvationen är en tredjegradare och så ska det finnas tre lösningar. Ekvationen är således färdiglöst.

Svar: Ekvationen löses av $x = 3/2$ och $x = -1 + \sqrt{2}$ samt $x = -1 - \sqrt{2}$.

(b) Olikheten kan lösas genom att sammanställa ett teckenschema. Nollställena är $x = 3/2$ och $x = 5$ i täljaren samt $x = -1$ i nämnaren. Teckentabellen blir

x		-1		$3/2$		5	
$2x - 3$	-	-	-	0	+	+	+
$5 - x$	+	+	+	+	+	0	-
$x + 1$	-	0	+	+	+	+	+
$\frac{(2x-3)(5-x)}{x+1}$	+	$\lightning$	-	0	+	0	-

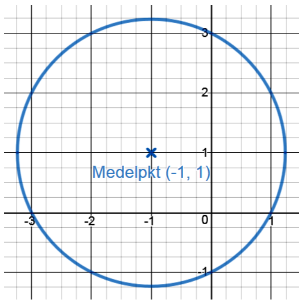
I teckentabellen avläses att olikheten uppfylls då $x < -1$ eller $3/2 \leq x \leq 5$. Ifall intervallbeteckningen används så blir lösningsmängden $(-\infty, -1) \cup [3/2, 5]$.

Uppgift 5. Ekvationen tolkas m.h.a. kvadratkomplettering:

$$VL = x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = \underbrace{x^2 + 2x + 1^2}_{(x+1)^2} - 1^2 + \underbrace{y^2 - 2y + 1^2}_{(y-1)^2} - 1^2 - 3 = (x+1)^2 + (y-1)^2 - 5.$$

Kurvans ekvation är alltså $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$.

(a) Kurvan är en cirkel med medelpunkten $(-1, 1)$ och radien $\sqrt{5}$.



(b) Riktningskoefficienten är $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-1}{2-4} = \frac{1}{2}$. Enpunktsformeln ger

$$(y - 0) = \frac{1}{2}(x - 2) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{x}{2} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x - 2y - 2 = 0.$$

(c) Antalet skärningspunkter mellan linjen och kurvan behöver bestämmas. Sätt in $y = \frac{x}{2} - 1$ i cirkelns ekvation:

$$(x + 1)^2 + \left(\left(\tfrac{x}{2} - 1\right) - 1\right)^2 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2x + 1 + \frac{x^2}{4} - 2x + 4 = 5$$

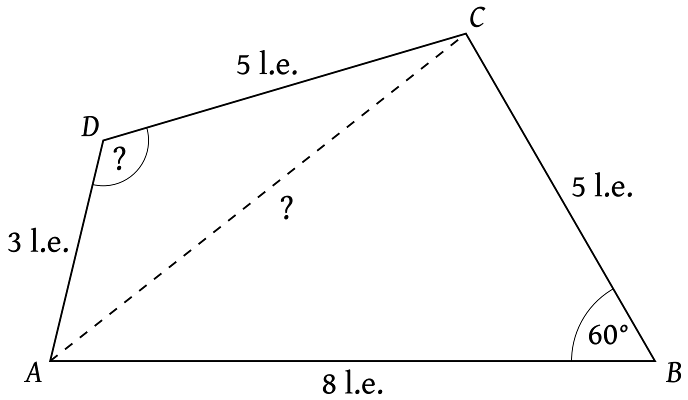
$$\Leftrightarrow \quad \frac{5x^2}{4} + 5 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

När detta värde på x sätts in i linjens ekvation, fås $y = \frac{0}{2} - 1 = -1$. Det finns alltså endast en skärningspunkt (och dess koordinater är $(0, -1)$), varför linjen är en tangentlinje till cirkeln.

Uppgift 6. Enligt uppgiften är $n(92) = 25$, vilket ger oss ekvationen

$$50e^{k\cdot 92} = 25 \quad \Leftrightarrow \quad e^{92k} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 92k = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 92k = -\ln 2 \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{-\ln 2}{92}.$$

Uppgift 7.



(a) Längden av diagonalen AC kan beräknas m.h.a. cosinussatsen i triangeln ABC:

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB|\,|BC|\,\cos\beta$$
$$|AC|^2 = 8^2 + 5^2 - 2\cdot 8\cdot 5\cos 60^\circ = 64 + 25 - 80\cdot\frac{1}{2} = 89 - 40 = 49.$$

Således är $|AC| = \sqrt{49} = 7$ l.e.

(b) Vinkeln vid hörnet D kan beräknas m.h.a. cosinussatsen i triangeln ACD:

$$|AC|^2 = |CD|^2 + |DA|^2 - 2|CD|\,|DA|\,\cos\delta$$
$$7^2 = 5^2 + 3^2 - 2\cdot 5\cdot 3\cos\delta \quad \Leftrightarrow \quad 49 = 34 - 30\cos\delta \quad \Leftrightarrow \quad \cos\delta = \frac{15}{-30} = \frac{-1}{2}.$$

Således är $\delta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ = \frac{2}{3}\pi$ (radianer).

Uppgift 8 (*Nya upplägget*)**.** (a) Räkneoperationerna för komplexa tal ger att

$$\frac{3-4i}{2-i}\cdot\frac{-3+11i}{1+3i} = \frac{-9+33i+12i-44i^2}{2+6i-i-3i^2} = \frac{-9+45i-44(-1)}{2+5i-3(-1)} = \frac{35+45i}{5+5i} = \frac{\cancel{5}(7+9i)}{\cancel{5}(1+i)}$$
$$= \frac{7+9i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = \frac{7-7i+9i-9i^2}{1^2-i^2} = \frac{7+2i-9(-1)}{1-(-1)} = \frac{16+2i}{2} = 8+i.$$

(b) HL på polär form blir $-16 = 16(-1+0i) = 16(\cos\pi + i\sin\pi) = 16e^{i\pi}$. Ekvationen $z^4 = 16e^{i\pi}$ har fyra lösningar:

$$z = \sqrt[4]{16}\,e^{i(\pi+k2\pi)/4} = 2e^{i(\pi/4+k\pi/2)}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

När man satt in konkreta värden på k, kan lösningarnas rektangulära form bestämmas:

$k = 0$: $\quad z_1 = 2e^{i\pi/4} = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2},$

$k = 1$: $\quad z_2 = 2e^{i3\pi/4} = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2},$

$k = 2$: $\quad z_3 = 2e^{i5\pi/4} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2},$

$k = 3$: $\quad z_4 = 2e^{i7\pi/4} = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$

Uppgift 8 (*Gamla upplägget*). (a) Gränsvärdet är av typen $0/0$ som kan beräknas m.h.a. standardgränsvärdet $\sin z/z \to 1$ då $z \to 0$.

$$\frac{5x}{\tan 7x} = \frac{5x\cos 7x}{\sin 7x} = \underbrace{\frac{7x}{\sin 7x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{5x}{7x}}_{=5/7} \cdot \underbrace{\cos 7x}_{\to \cos 0} \to 1 \cdot \frac{5}{7} \cdot \underbrace{\cos 0}_{=1} = \frac{5}{7} \quad \text{då } x \to 0.$$

(b) Gränsvärdet är av typen $(\infty - \infty)/\infty$ som kan beräknas genom att förlänga bråket med täljarens konjugat. Dominerande potenser av x bryts därefter ut och förkortas.

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{x^4+4x^3} - \sqrt{x^4+1}}{x+5} \cdot \frac{\sqrt{x^4+4x^3} + \sqrt{x^4+1}}{\sqrt{x^4+4x^3} + \sqrt{x^4+1}} = \frac{(x^4+4x^3) - (x^4+1)}{(x+5)(\sqrt{x^4+4x^3} + \sqrt{x^4+1})} \\
&= \frac{x^3\left(4 - \frac{1}{x^3}\right)}{x\left(1+\frac{5}{x}\right) \cdot \sqrt{x^4}\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\right)} = \frac{4 - \frac{1}{x^3}}{\left(1+\frac{5}{x}\right) \cdot \left(\sqrt{1+\frac{4}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\right)} \\
&\to \frac{4-0}{(1+0)(\sqrt{1+0} + \sqrt{1+0})} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{då } x \to \infty.
\end{aligned}$$