Matematiska vetenskaper
Göteborgs universitet

Lösningsförslag till tentamen
2019-06-03, 8:30–12:30

NBAM00: Naturvetenskapligt basår – Matematik, del 1

Uppgift 1. (a) Potenslagarna medför att

$$\frac{\left(\frac{81}{16}\right)^{1/2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^{-1}} = \frac{\frac{81^{1/2}}{16^{1/2}} - \frac{1^2}{2^2}}{\frac{2^3}{5^3} \cdot \frac{10}{3}} = \frac{\frac{9}{4} - \frac{1}{4}}{\frac{8}{125} \cdot \frac{10}{3}} = \frac{\frac{8}{4}}{\frac{8}{25} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{2}{\frac{16}{75}} = \frac{2 \cdot 75}{16} = \frac{75}{8}.$$

(b) Logaritmlagarna ger att

$$\underbrace{2\ln 4}_{=\ln 4^2} + \underbrace{\ln e^2}_{=2} - \underbrace{\frac{\lg 8}{\lg e}}_{=\ln 8} - \ln 2 + \underbrace{\lg 1}_{=0} = \ln 16 + 2 - \ln 8 - \ln 2 = \ln\left(\frac{16}{8 \cdot 2}\right) + 2 = \underbrace{\ln 1}_{=0} + 2 = 2.$$

Uppgift 2. (a) Enligt randvinkelsatsen är $|\angle CMB| = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$. Triangeln BCM är likbent med $|BM| = |CM| = 4$ cm. Det innebär att vinklarna $\angle MBC$ och $\angle BCM$ är lika stora. Således är $|\angle MBC| = |\angle BCM| = (180^\circ - |\angle CMB|)/2 = (180^\circ - 60^\circ)/2 = 60^\circ$. Triangeln BCM är alltså liksidig. Därför är $|BC| = |BM| = |CM| = 4$ cm.

(b) I den liksidiga triangeln BCM kan höjden beräknas m.h.a. den trigonometriska funktionen sinus. Låt D beteckna mittpunkten av sidan BC. Då är

$$\sin(\angle MBC) = \frac{|DM|}{|BM|} \quad \Rightarrow \quad \sin 60^\circ = \frac{|DM|}{4} \quad \Rightarrow \quad |DM| = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ cm}.$$

Höjden i triangeln ABC blir således $|AD| = |AM| + |MD| = 4 + 2\sqrt{3}$ cm.

(c) Arean kan beräknas som halva basen ggr höjden.

$$A = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |DM| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (4 + 2\sqrt{3}) = 8 + 4\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Uppgift 3. Vektorerna är vinkelräta om (och endast om) deras skalärprodukt blir noll.

$$0 = \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = (1, a, -1) \bullet (1, 2, a) = 1 + 2a - a = 1 + a \quad \Rightarrow \quad a = -1.$$

Således är $\mathbf{u} = (1, -1, -1)$ och $\mathbf{v} = (1, 2, -1)$ och så $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (2, 1, -2)$. Längden beräknas m.h.a. Pythagoras sats:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3.$$

Uppgift 4. (a) Den konstanta termen på VL är delbar med ±1, ±2 och ±4. Det innebär att ett av dessa tal är en lösning till ekvationen. Vilket tal det är upptäcks genom att pröva talen i ekvationen:

$$x = 1: \qquad 1^3 - 8\cdot 1^2 + 14\cdot 1 - 4 = 3 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \text{ är ingen lösning}$$
$$x = -1: \qquad (-1)^3 - 8\cdot(-1)^2 + 14\cdot(-1) - 4 = -27 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \text{ är ingen lösning}$$
$$x = 2: \qquad 2^3 - 8\cdot 2^2 + 14\cdot 2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \text{ är en lösning}$$

Polynomdivision ger $(x^3-8x^2+14x-4)\div(x-2) = x^2-6x+2$, så ekvationens VL kan faktoruppdelas

$$x^3 - 8x^2 + 14x - 4 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)(x^2-6x+2) = 0.$$

För att hitta de resterande lösningarna så ska $x^2 - 6x + 2 = 0$ lösas m.h.a. pq-formeln.

$$x^2 - 6x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{2,3} = \frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{6}{2}\right)^2 - 2} = 3 \pm \sqrt{9-2} = 3 \pm \sqrt{7}$$

Den ursprungliga ekvationens rötter är 2, $3+\sqrt{7}$ och $3-\sqrt{7}$.

(b) Först behöver man flytta allt över till ena ledet och skriva bråken på gemensamma bråkstrecket:

$$\frac{x-1}{x+2} \geq \frac{x+3}{x-4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{x+2} - \frac{x+3}{x-4} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)(x-4)-(x+3)(x+2)}{(x+2)(x-4)} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2-5x+4-(x^2+5x+6)}{(x+2)(x-4)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-10x-2}{(x+2)(x-4)} \geq 0$$

Olikheten kan nu lösas genom att sammanställa ett teckenschema. Nollställena är $x = -0{,}2$ i täljaren samt $x = -2$ och $x = 4$ i nämnaren. Teckentabellen blir

x		-2		$-0{,}2$		4	
$-10x-2$	+	+	+	0	-	-	-
$x+2$	-	0	+	+	+	+	+
$x-4$	-	-	-	-	-	0	+
$\frac{-10x-2}{(x+2)(x-4)}$	+	$\lightning$	-	0	+	$\lightning$	-

I teckentabellen avläses att olikheten uppfylls då $x < -2$ eller $-0{,}2 \leq x < 4$. Ifall intervallbeteckningen används så blir lösningsmängden $(-\infty, -2) \cup [-0{,}2, 4)$.

Uppgift 5. (a) $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 5$.

(b) Linjens riktningskoefficient är $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-0}{2-1} = 2$. Enpunktsformeln ger att linjens ekvation blir $y - 0 = 2(x-1)$, d.v.s. $y = 2x - 2$.

(c) De sökta linjerna har ekvationen $y = 2x + m$, där $m \in \mathbb{R}$ är en okänd konstant. Linjen ska tangera cirkeln, vilket innebär att linjen endast har en skärningspunkt med cirkeln. Insättning av $y = 2x + m$ i cirkelns ekvation ger

$$(x+1)^2 + ((2x+m)-3)^2 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2x + 1 + 4x^2 + m^2 + 9 + 4xm - 12x - 6m = 5$$
$$\Leftrightarrow \quad 5x^2 + x(4m-10) + m^2 - 6m + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{4m-10}{5}\cdot x + \frac{m^2-6m+5}{5} = 0.$$

Eftersom det endast ska finnas en skärningspunkt, så får denna ekvation ha endast en lösning x. Då krävs det att diskriminanten är lika med 0.

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{2m-5}{5}\right)^2 - \frac{m^2-6m+5}{5} \\ &= \frac{4m^2-20m+25}{25} - \frac{5m^2-30m+25)}{25} = \frac{-m^2+10m}{25} = \frac{(10-m)m}{25}.\end{aligned}$$

Diskriminanten är noll omm $m = 0$ eller $m = 10$.

Svar: Linjerna $y = 2x$ och $y = 2x + 10$ är tangentlinjer till cirkeln C.

Uppgift 6. Antalet individer i bakteriekulturen efter t timmar kan beskrivas av funktionen $N(t) = 2^{20} \cdot 1{,}15^t$. Man söker alltså värdet på t så att N:s värde blir 2^{27}. Då löses ekvationen

$$\begin{aligned}&2^{27} = 2^{20} \cdot 1{,}15^t \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2^{27}}{2^{20}} = 1{,}15^t \quad\Leftrightarrow\quad 2^7 = 1{,}15^t \\ \Leftrightarrow\quad &\ln(2^7) = \ln(1{,}15^t) \quad\Leftrightarrow\quad 7\ln 2 = t\ln 1{,}15 \quad\Leftrightarrow\quad t = \frac{7\ln 2}{\ln 1{,}15} = 7\log_{1{,}15} 2.\end{aligned}$$

Uppgift 7. Se bevisen under rubriken Extramaterial på kurshemsidan:
`http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/GU/NBAM00/H18-1/#Extramaterial`

Uppgift 8 (*Nya upplägget*)**.** (a) Räkneoperationerna för komplexa tal ger att

$$\begin{aligned}z &= (4-i)(2+i) - \frac{3+11i}{1+i} = (8+4i-2i-i^2) - \frac{3+11i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} \\ &= (9+2i) - \frac{3-3i+11i-11i^2}{1-i^2} = 9+2i-\frac{14+8i}{2} = 9+2i-(7+4i) = 2-2i.\end{aligned}$$

Således är

$$\operatorname{Re} z = 2, \quad \operatorname{Im} z = -2, \quad |z| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8}, \quad \arg z = \arctan\left(\frac{-2}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}.$$

(b) Ansatsen $z = x + iy$ omvandlar den givna ekvationen till $(x^2 - y^2) + 2ixy = 8 - 6i$. Identifiering av realdelarna, imaginärdelarna samt absolutbeloppen på VL och HL ger att

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = -6 \\ x^2 + y^2 = |8-6i| = 10 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} 2x^2 = 18 \\ xy = -3 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \mp 1 \end{cases}$$

Ekvationen löses av $z = 3 - i$ samt av $z = -3 + i$.

Uppgift 8 (*Gamla upplägget*). (a) Gränsvärdet är av typen $0/0$ som kan beräknas m.h.a. standardgränsvärdet $\sin z/z \to 1$ då $z \to 0$.

$$\frac{\tan 3x}{\sin 5x} = \frac{\sin 3x}{\cos 3x \sin 5x} = \underbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{5x}{\sin 5x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{3x}{5x}}_{=3/5} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos 3x}}_{\to 1/\cos 0} \to 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{5} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos 0}}_{=1} = \frac{3}{5} \quad \text{då } x \to 0.$$

(b) Gränsvärdet är av typen $(\infty - \infty)$ som kan beräknas genom att förlänga uttrycket med dess konjugat. Dominerande potenser av x bryts därefter ut och förkortas.

$$\left(\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2-1}\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2-1}} = \frac{(x^2+3x) - (x^2-1)}{\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2-1}} = \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2-1}}$$
$$= \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} \cdot \frac{3 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1+3x^{-1}} + \sqrt{1-x^{-2}}} \to \frac{3-0}{(\sqrt{1+3\cdot 0} + \sqrt{1-0})} = \frac{3}{2} \quad \text{då } x \to \infty.$$