Matematiska vetenskaper | Tentamen
Göteborgs universitet | 2019-06-03, 8:30–12:30

NBAM00: Naturvetenskapligt basår – Matematik, del 1

Examinator: Lukáš Malý, tel. 031 - 772 53 42
Hjälpmedel: Formelblad utdelat med tesen (tryckt på baksidan). Inga miniräknare är tillåtna.

Betygsgränser: 20 poäng krävs för betyget G och 36 poäng krävs för betyget VG
Lösningsförslag publiceras på kurshemsidan idag kl. 14:30.

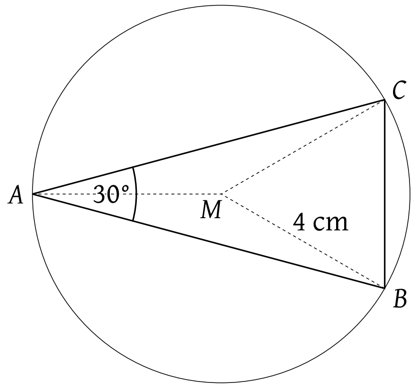
---

1. Förkorta och förenkla (4p + 4p)

(a) $$\frac{\left(\frac{81}{16}\right)^{1/2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^{-1}},$$ (b) $$2\ln 4 + \ln e^2 - \frac{\lg 8}{\lg e} - \ln 2 + \lg 1\,.$$

2. En likbent triangel ABC med toppvinkel 30° är inskriven i en cirkel med radien 4 cm enligt figuren till höger. (7p)

Beräkna:
(a) längden av sidan BC,
(b) höjden mot sidan BC,
(c) arean av triangeln ABC.



3. Bestäm talet $a \in \mathbb{R}$ sådant att vektorerna $\mathbf{u} = (1, a, -1)$ och $\mathbf{v} = (1, 2, a)$ blir ortogonala. Beräkna sedan längden av vektorn $\mathbf{u} + \mathbf{v}$. (5p)

4. (a) Lös ekvationen $x^3 - 8x^2 + 14x - 4 = 0$ förutsatt att en av dess rötter är ett heltal. (4p)
(b) Lös olikheten $\dfrac{x-1}{x+2} \geq \dfrac{x+3}{x-4}$. (4p)

5. (a) Bestäm en ekvation för cirkeln C som har mittpunkt i $(-1, 3)$ och radien $\sqrt{5}$. (2p)
(b) Bestäm en ekvation för linjen L som går genom punkterna $(1, 0)$ och $(2, 2)$. (2p)
(c) Bestäm en ekvation för de linjer som är parallella med L och tangerar cirkeln C. (4p)

6. En bakteriekultur har vid en viss tidpunkt 2^{20} individer och växer exponentiellt med 15 % i timmen. Efter hur många timmar har antalet individer växt till 2^{27}? (3p)
Anm.: Du får svara med logaritmuttryck.

7. Bevisa en av additions- eller subtraktionsformlerna för sin eller cos. (Välj själv!) (4p)
Anm.: Du får gärna förutsätta att alla vinklar i formeln är spetsiga.

8. *(Gamla upplägget)* Beräkna följande gränsvärden: (3p + 4p)

(a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x},$$ (b) $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2-1}\right).$$

Var god vänd!

8. *(Nya upplägget)* (a) Bestäm real- och imaginärdelen, absolutbeloppet samt argumentet av det komplexa talet

$$z = (4 - i)(2 + i) - \frac{3 + 11i}{1 + i}. \qquad \text{(4p)}$$

(b) Lös ekvationen $z^2 = 8 - 6i$. Skriv lösningarna på formen $x + iy$. (3p)

Lycka till!

Formelblad

Avståndsformeln

Avståndet d mellan punkterna $P = (p_x, p_y)$ och $Q = (q_x, q_y)$ i planet ges av

$$d = \sqrt{(q_x - p_x)^2 + (q_y - p_y)^2}\,.$$

Symmetrin hos de trigonometriska funktionerna

$$\sin(-x) = -\sin x$$
$$\cos(-x) = \cos x$$

Additionsformlerna

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Trigonometriska ettan

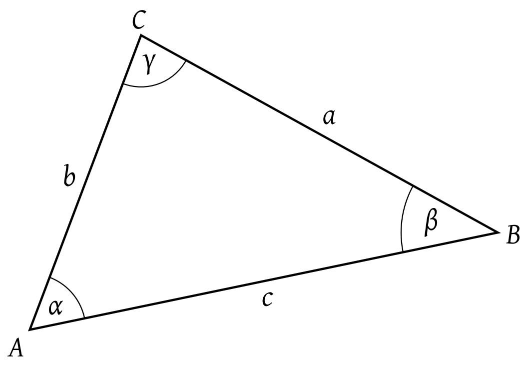
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Värden på sinus och cosinus för några standardvinklar

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Areasatsen

$$A = \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{bc\sin\alpha}{2} = \frac{ac\sin\beta}{2}$$



Sinussatsen

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

Cosinussatsen

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$