Överskott i 132-undvikande involutioner

Examensarbete

Lina Jansson

26 maj 2004

Översikt

- Vad vill jag visa?
- Några definitioner
- Egenskaper hos 132-undvikande involutioner
- Antalet 132-undvikande involutioner med givet antal överskott
- Avbildningar för rekursion med avseende på längd och överskott för 132-undvikande involutioner
- Avbildningar mellan Ballotvägar och 132-undvikande involutioner.

Hur många 132-undvikande involutioner med given längd och givet antal överskott finns det?

1									
1	0								
1	1	0							
1	2	0	0						
1	3	2	0	0					
1	4	5	0	0	0				
1	5	9	5	0	0	0			
1	6	14	14	0	0	0	0		
1	7	20	28	14	0	0	0	0	
1	8	27	48	42	0	0	0	0	0

Definitioner

Definition 1 *En* permutation *är en omordning av en ändlig ordnad mängd S med $|S| = n$. Permutationer kan representeras som* ord *skrivna med bokstäverna $1 \ldots n$.*

Definition 2 *En* involution *är en permutation där alla bokstäver antingen står kvar på sin ursprungliga plats, eller också har dom bytt plats med ett specifikt annat element.*

Exempel 1 *Permutationen 13756482 är ingen involution, medan däremot 47316528 är det.*

Definition 3 *Ett* överskott *är en bokstav i sådan att den står på en plats j som är mindre än i.*

Definition 4 *En* inversion *i en permutation π är ett par av bokstäver (i, j) sådana att i är större än j och i står före j i π.*

Exempel 2 *I permutationen $\pi = 241356$ är 2 och 4 överskott och paren $(2, 1)$, $(4, 1)$, och $(4, 3)$ är alla inversioner.*

Definition 5 *Ett* mönster *som förekommer i en permutation π är en kortare permutation σ som är k lång sådan att det finns k bokstäver i π som står i samma relativa ordning som bokstäverna i σ.*

Definition 6 *En permutation π är σ-*undvikande *om mönstret σ inte förekommer i π.*

Exempel 3 *Betrakta permutationen 453126. Mönstret 123 förekommer två gånger, både $\underline{45}312\underline{6}$ och $453\underline{126}$ är förekomster. Däremot är 453126 132-undvikande, då detta mönster inte förekommer alls.*

Jag kommer att koncentrera mig på 132-undvikande i fortsättningen.

Definition 7 *Ett* Ballotord *är ett ord skrivet med bokstäverna u och d sådant att för varje plats där det står ett d gäller det att det till vänster om detta d står minst ett u fler än det står d:n.*

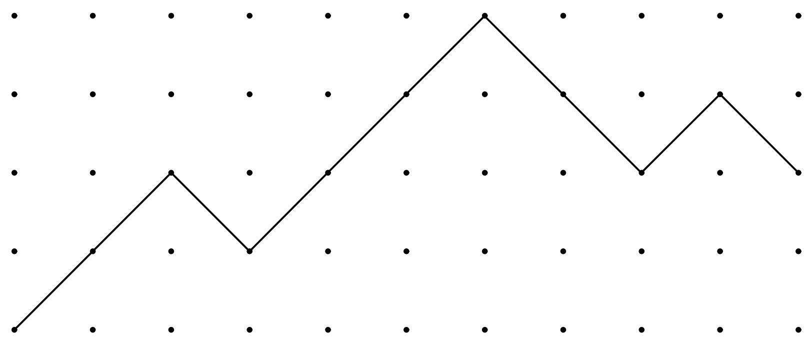
Definition 8 *En* Ballotväg *är en väg som börjar i $(0,0)$ som består av steg snett uppåt eller snett nedåt arangerade så att vägen aldrig hamnar under x-axeln.*

Definition 9 *En* Dyckväg *är en Ballotväg som slutar på x-axeln.*

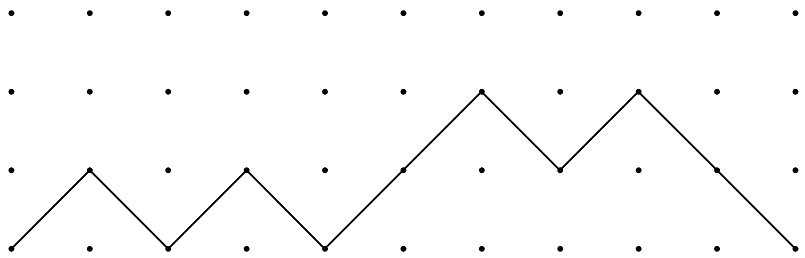
Ett Ballotord beskriver en Ballotväg om varje u får stå för ett steg snett uppåt och varje d för ett steg snett nedåt.

Ett Ballotord som beskriver en Dyckväg kallas för ett *Dyckord*.

Exempel 4 *En Ballotväg som beskrivs av Ballotordet* $B = uuduuuddud$:



Exempel 5 *En Dyckväg som beskrivs av Dyckordet* $D = ududuududd$:



Definition 10 Catalantalen *är de tal som definieras av rekursionen*

$$C_n = \begin{cases} 1 & \textit{if } n = 0,\ 1 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k} & \textit{if } n > 1. \end{cases}$$

En sluten form för Catalantalen är

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Definition 11 Ballottalen *är de tal som definieras av*

$$b(n,k) = \frac{2k-n+1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$$

där $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq k \leq n$*.*

Catalantalen är bara ett specialfall av Ballottalen, som fås då $k = \frac{n}{2}$.

Ballottalen räknar antalet möjliga Ballotvägar, medan Catalantalen räknar antalet Dyckvägar.

Några egenskaper hos 132-undvikande involutioner

Lemma 1 *En 132-undvikande involution med k överskott har dessa på de k första platserna.*

Lemma 2 *En involution bestäms helt av sina överskott.*

Lemma 3 *En 132-undvikande involution med k överskott bestäms helt av sina k första bokstäver.*

Lemma 4 *I en 132-undvikande involution av längd n så måste bokstäverna till vänster om bokstaven n vara bokstäverna $n-1, \ldots, n-k$ för något k, dock inte nödvändigtvis i denna ordning.*

Antalet 132-undvikande involutioner av längd n med k överskott kan räknas med Ballottal

Sats 1 *Antalet* 132*-undvikande involutioner av längd* n *med* k *överskott kan beräknas rekursivt som summan av antalet* 132*-undvikande involutioner av längd* $n-1$ *med* k *överskott och antalet* 132*-undvikande involutioner av längd* $n-1$ *med* $k-1$ *överskott.*

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \qquad 0 \\
1 \qquad 1 \qquad 0 \\
1 \qquad 2 \qquad 0 \qquad 0 \\
1 \qquad 3 \qquad 2 \qquad 0 \qquad 0 \\
1 \qquad 4 \qquad 5 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0 \\
1 \qquad 5 \qquad 9 \qquad 5 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0 \\
1 \qquad 6 \qquad 14 \qquad 14 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0 \\
1 \qquad 7 \qquad 20 \qquad 28 \qquad 14 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0 \\
1 \qquad 8 \qquad 27 \qquad 48 \qquad 42 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0
\end{array}
$$

Avbildningar mellan 132-undvikande involutioner med olika längd

Definition 12 *Definiera $\Phi_k(\pi)$ för en 132-undvikande involution π som är n lång och har k överskott som den involution av längd $n-1$ vars överskott ges av:*

- *Om n inte är ett överskott i π, låt $\Phi_k(\pi)$ ha samma överskott som π men ha längd $n-1$.*
- *Om n är ett överskott, låt i vara den plats n står på i π. Låt $\Phi_k(\pi)$ ha samma överskott som π på platserna till vänster om i. Dra bort 1 från de överskott som står till höger om π och lyft bort n från π. Låt nu $\Phi_k(\pi)$ vara den involution som har dessa överskott.*

Definition 13 *Definiera* $\Psi_k(\pi)$ *för en* 132*-undvikande involution* π *av längd* $n-1$ *med antingen* k *eller* $k-1$ *överskott som den involution av längd* n *där* n *har lagts till enligt:*

- *Om* π *har* k *överskott, lägg till* n *sist.*
- *Om* π *har* $k-1$ *överskott, hitta den plats längst till höger i* π *där* n *blir ett överskott sådan att alla egenskaper hos en* 132*-undvikande involution fortfarande är uppfyllda om* n *placeras där, och sätt in* n *där.*

Exempel 6 *Låt* $\pi = 894356712$*. Eftersom* 9 *står på den andra platsen drar* Φ_3 *bort* 1 *från* 4*:an på tredje plats men behåller* 8*:an och* $\sigma = \Phi_3(\pi) = 83245671$*.*

För att nu beräkna $\Psi_3(\sigma)$*, observera att* 8*:an står först, varför* 9*:an hamnar efter den. Lägg nu till* 1 *till alla överskott efter platsen* 9*:an hamnade på, det vill säga till* 3*:an, och få* 894356712*.*

Observera att det också hade gått att beräkna $\Psi_2(\sigma) = 832456719$*.*

Sats 2 *Det finns lika många involutioner av längd* n *med* k *överskott som det finns Ballotvägar som slutar i* $(n, n-2k)$*, det vill säga Ballottalet* $b(n,k)$*.*

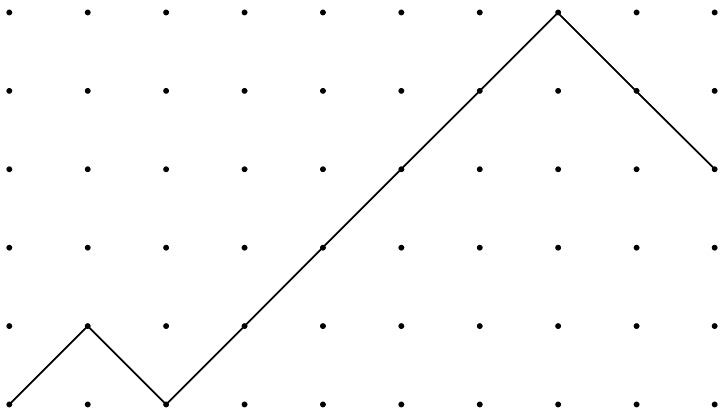
Avbildningar mellan Ballotvägar och 132-undvikande involutioner

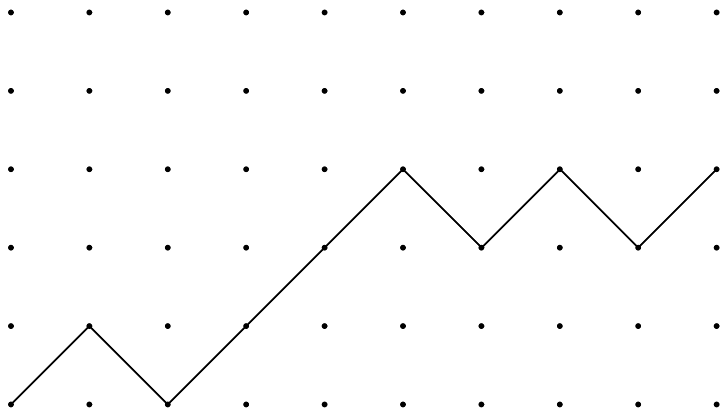
Definition 14 *Om* π *har* k *överskott, låt* $\mathcal{D}(\pi)$ *vara det Ballotord med* n *bokstäver och* d*:n på platserna* $j \in \{\pi(i) - \mathrm{INV}_i(\pi) \ : \ i \leq k\}$ *och* u *på alla andra platser, där* $\mathrm{INV}_i(\pi)$ *är antalet inversioner i* π *med det minsta elementet på plats* i*.*

Definition 15 *Låt $\mathcal{P}(\Delta)$, där Δ är ett Ballotord, vara den 132-undvikande involution vars överskott definieras enligt följande algoritm: Låt $\mathcal{N}$ vara en mängd som innehåller numren på alla positioner i Δ där det står ett d, utom den sista. Låt $\sigma =$ positionen för det sista d:et i $\mathcal{N}$. Upprepa följande tills $\mathcal{N}$ är tom.*

1. *Lyft ut det största bokstaven ℓ ur $\mathcal{N}$.*
2. *Låt i vara antalet bokstäver i σ.*
3. *Om $\ell + i$ är mindre än alla tal som finns i σ, sätt in $\ell + i$ sist i σ. Annars, om $\ell + i - 1$ är mindre än de första $i - 1$ talen i σ, skjut in $\ell + i - 1$ på plats i. Om inte detta heller går, fortsätt att jämföra $\ell + i - j$ med bokstäverna på platserna fram till $i - j$ tills det går att skjuta in på någon plats $i - j$.*

Exempel 7 *Låt* $\pi_1 = 894356712$ *och* $\pi_2 = 874356219$. *Detta ger* $\mathcal{D}(\pi_1) = \Delta_1 = uduuuuudd$ *och* $\mathcal{D}(\pi_2) = \Delta_2 = uduuududu$.





För att beräkna $\mathcal{P}(\Delta_1)$ *har vi att* $\mathcal{N} = \{2, 8\}$ *och* $\sigma = 9$. *Lyft ut* 8 *från* $\mathcal{N}$ *och placera in i* σ *för att få* $\sigma = 89$ *(eftersom* $8 + 1 = 9$*). Lyft ut* 2 *från* $\mathcal{N}$. *Då blir* $\mathcal{N}$ *tom. Detta placerar in* 4 *i slutet av* σ *(eftersom* σ *har två bokstäver innan detta, och* $2 + 2 = 4$ *är mindre än både* 8 *och* 9*). Alltså är* $\mathcal{P}(\Delta) = 894356712$.

Exempel 7 (forts.) *För att istället beräkna* $\Delta = uduuududu$ *får vi till att börja med* $\mathcal{N} = \{2, 6\}$ *och* $\sigma = 8$. *Att lyfta ut* 6 *och sätt in i* σ *ger* $\sigma = 87$ *eftersom* $6 + 1 = 7 < 8$. *Om vi nu tömmer* $\mathcal{N}$ *och placerar in* 4 *i* σ *får vi* $\sigma = 874$ *eftersom* $4 = 2 + 2 < 7$ *och* $4 < 8$.