Permutationer och Mönster

Roger Lie

Del 1: Undvikande och Räknande av Mönster

- Grundläggande definitioner och lite Catalan-tal
- Genererande träd
- Generaliserade mönster

Del 2: Mönstertal och Länkar

- En distributionell överraskning
- Länkar
- Diagonalpolynom

Del 1

Undvikande och Räknande av Mönster

Definition: Låt $\pi \in \mathcal{S}_n$, $\tau \in \mathcal{S}_k$. Om elementen i en delsekvens av π har samma relativa ordning som τ, så är det en förekomst av mönstret τ. Finns det ingen sådan delsekvens så är π τ-undvikande.

Exempel: Permutationen $\pi = 453621$ har två förekomster av mönstret 213, nämligen 436 och 536, men ingen förekomst av 132. Alltså är π 132-undvikande.

$\mathcal{S}_n(\tau)$= Mängden av alla permutationer som undviker τ.

$s_n(\tau) = |\mathcal{S}_n(\tau)|$.

$\mathcal{S}_n^r(\tau)$= Mängden av alla permutationer med exakt r förekomster av τ.

$s_n^r(\tau) = |\mathcal{S}_n^r(\tau)|$.

Komplementet till π är $\qquad \pi^c(i) = n + 1 - \pi(i).$

Reversen av π är $\qquad \pi^r(i) = \pi(n + 1 - i).$

Inversen till π definieras enligt $\qquad \pi(i) = j \Leftrightarrow \pi^i(j) = i.$

Dessa operationer genererar den dihedrala gruppen, D_8.
Banorna kallas symmetriklasser.

Exempel: Med $\pi = 453621$ har vi att

$$\pi^c = 324156 \qquad \pi^r = 126354 \qquad \pi^i = 653124.$$

Definition: Om $s_n(\tau_1) = s_n(\tau_2)$ för alla n, så hör τ_1 och τ_2 till samma Wilf-klass och är Wilf-ekvivalenta.

Två element i samma symmetriklass är Wilf-ekvivalenta, men omvändningen gäller inte.

Exempel: För mönster av längd fyra finns sju symmetriklasser, men bara tre Wilf-klasser.

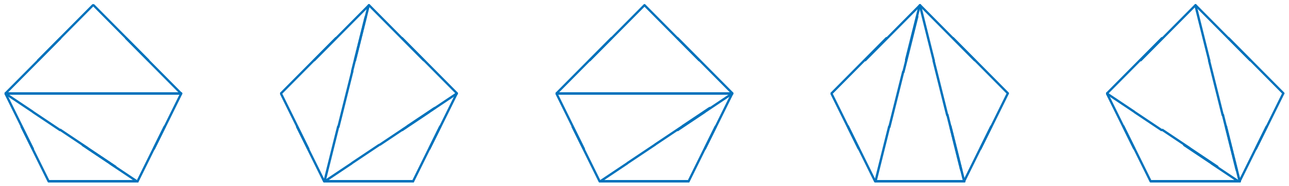
Om τ är ett mönster av längd tre så är $s_n(\tau) = C_n$.

C_n är det n:te Catalan-talet.

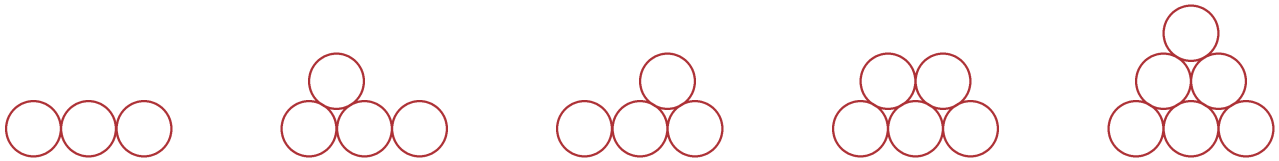
$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i} = 1,\ 1,\ 2,\ 5,\ 14, \ldots$$

Saker som räknas av Catalan-tal

Antal trianguleringar av en konvex (n+2)-hörning



Antal sätt att stapla mynt med en bas av n mynt



Genererande Träd

Definition: Ett genererande träd är ett rotat, indexerat träd med egenskapen att man från varje nods index kan härleda dess barn och deras index.

Det n:te nivåtalet är antalet noder på n:te nivån.

Exempel: Fibonacci-trädet:

Rot: (1)

Regler: $(1) \longrightarrow (2)$

$(2) \longrightarrow (1)(2)$

Exempel: Trädet för 213-undvikande permutationer.

Med t som positionen för första fallet för $\tau \in \mathcal{S}_n(213)$ har vi:

Rot:	(1)
Regel:	(t) $\longrightarrow (2)(3)\cdots(t)(t+1)$

Generaliserade Mönster

Definition: I ett generaliserat mönster kan vi ha inskränkningen att två intilliggande element i mönstret måste också vara intilliggande i permutationen.

Ett streck mellan två element betyder att de inte måste vara grannar i permutationen.

Exempel: Permutationen 342165 är $(1\text{-}23)$-undvikande, men har två förekomster av det klassiska mönstret $1\text{-}2\text{-}3$, nämligen 346 och 345.

För generaliserade mönster av längd tre med ett streck finns tre symmetriklasser:

1. $1\text{-}23$, $12\text{-}3$, $3\text{-}21$, $32\text{-}1$.
2. $1\text{-}32$, $3\text{-}12$, $21\text{-}3$, $23\text{-}1$.
3. $2\text{-}13$, $2\text{-}31$, $13\text{-}2$, $31\text{-}2$.

$s_n(1\text{-}23) = s_n(1\text{-}32) = B_n$

B_n är det n:te Bell-talet.

$s_n(2\text{-}13) = C_n$

Sats: $s_n^1(2\text{-}13)$ är lika med antalet sätt att dela upp en $(n+4)$-hörning i trianglar och en sjuhörning vilket är $\binom{2n}{n-3}$.

Beviset består av tre steg:

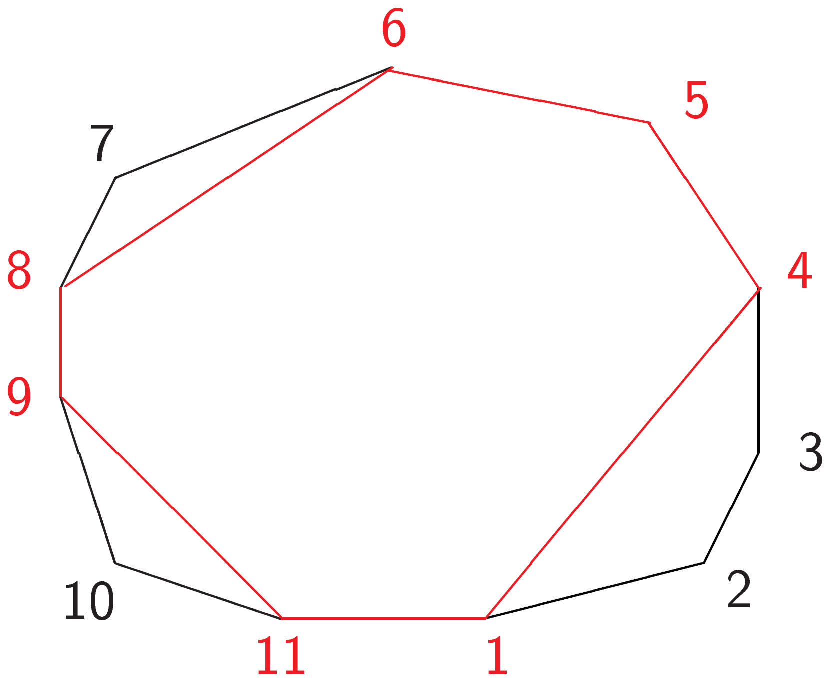
1. Räkning av uppdelningarna av $(n+4)$-hörningen.
2. Härledning av en rekursionsformel för uppdelningarna.
3. Bevis av att $s_n^1(2\text{-}13)$ uppfyller samma rekursion.

Steg 1

d_n är antalet uppdelningar.

d_n^1 är antalet uppdelningar som har (1) som hörn i sjuhörningen.

$d_n = \frac{n+4}{7} d_n^1$


6
5
7
8
4
9
3
10
2
11
1

$$d_n^1 = \sum_{a=2}^{n-1} \sum_{b=a+1}^{n} \sum_{c=b+1}^{n+1} \sum_{d=c+1}^{n+2} \sum_{e=d+1}^{n+3} \sum_{f=e+1}^{n+4} C(a,b,c,d,e,f).$$

$$C(a,b,c,d,e,f) = C_{a-2} C_{b-a-1} C_{c-b-1} C_{d-c-1} C_{e-d-1} C_{f-e-1} C_{n+4-f}.$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{f=e+1}^{n+4} C_{f-e-1} \cdot C_{n+4-f} &= C_0 \cdot C_{n+3-e} + \cdots + C_{n+3-e} \cdot C_0 \\
&= C_{n+4-e} \\
\sum_{e=d+1}^{n+3} C_{e-d-1} \cdot C_{n+4-e} &= C_0 \cdot C_{n+3-d} + \cdots + C_{n+2-d} \cdot C_1 \\
&= C_{n+4-d} - C_0 \cdot C_{n+3-d} \\
&= C_{n+4-d} - C_{n+3-d}
\end{aligned}
$$

$$d_n^1 = C_{n+3} - 5C_{n+2} + 6C_{n+1} - C_n = \frac{7}{n+4}\binom{2n}{n-3}$$

$$d_n = \binom{2n}{n-3}$$

Steg 2

$$d_n = 2\left(\sum_{i=1}^{n} d_{i-1}C_{n-i}\right) + C_{n+2} - 4C_{n+1} + 3C_n.$$

Ingen diagonal till (1)

Bidraget till d_n är

$$d_{n-1} + \sum_{a=3}^{n} \sum_{b=a+1}^{n+1} \sum_{c=b+1}^{n+2} \sum_{d=c+1}^{n+3} C_{a-1} C_{b-a+1} C_{c-b+1} C_{d-c+1} C_{n+3-d} =$$

$$d_{n-1} + C_{n+1} - 3C_n + C_{n-1}$$

Någon diagonal till (1)

Sjuhörningen till vänster om första diagonalen ger bidraget

$$\sum_{i=3}^{n-1} d_{n+2-i} C_{i-3}.$$

Sjuhörningen till höger ger bidraget

$$\sum_{i=7}^{n+3} (d_{i-5} + C_{i-3} - 3C_{i-4} + C_{i-5}) C_{n+4-i} =$$

$$C_{n+2} - 5C_{n+1} + 6C_n - C_{n-1} + \sum_{i=7}^{n+3} d_{i-5} C_{n+4-i}.$$

Steg 3

Med $b_n = s_n^1(2\text{-}13)$ har vi att

$$b_n = 2(\sum_{i=1}^{n} b_{i-1}C_{n-i}) + C_{n+2} - 4C_{n+1} + 3C_n.$$

yxz är förekomsten av 2-13.

yxz före eller efter 1 bidrar till b_n med $2\sum_{i=1}^{n} b_{i-1}C_{n-i}$.

Med $x = 1$ får vi tre intervall

$$(1).\quad 2,\ 3, \ldots,\ y-1,$$

$$(2).\quad y+1,\ y+2, \ldots,\ z-1,$$

$$(3).\quad z+1,\ z+2, \ldots,\ n.$$

Dessa måste placeras $(3a)\ y\ (3b)\ 1z\ (3c)\ (2)\ (1)$.

Bidraget är $$\sum_{y=2}^{n-1} \sum_{z=y+1}^{n} \sum_{i=0}^{n-z} \sum_{j=0}^{n-z-i} C_{y-2}C_{z-y-1}C_iC_jC_{n-z-i-j}.$$

Med $x \neq 1$ får vi fyra intervall

$$
\begin{aligned}
&(1)\ 2,\ 3, \ldots, x-1, \\
&(2)\ x+1,\ x+2, \ldots, y-1, \\
&(3)\ y+1,\ y+2, \ldots, z-1, \\
&(4)\ z+1,\ z+2, \ldots, n.
\end{aligned}
$$

Dessa placeras $(4a)\ y\ (4b)\ 1\ (1a)\ xz\ (4c)\ (3)\ (2)\ (1b)$.

Detta ger $\displaystyle\sum_{x=2}^{n-2} \sum_{y=x+1}^{n-1} \sum_{z=y+1}^{n} \sum_{i=0}^{n-z} \sum_{j=0}^{n-z-i} C_{x-1}C_{y-2}C_{z-y-1}C_iC_jC_{n-z-i-j}$

Sammantaget blir bidraget till b_n

$$\sum_{x=1}^{n-2} \sum_{y=x+1}^{n-1} \sum_{z=y+1}^{n} \sum_{i=0}^{n-z} \sum_{j=0}^{n-z-i} C_{x-1} C_{y-2} C_{z-y-1} C_i C_j C_{n-z-i-j} =$$

$$C_{n+2} - 4C_{n+1} + 3C_n.$$

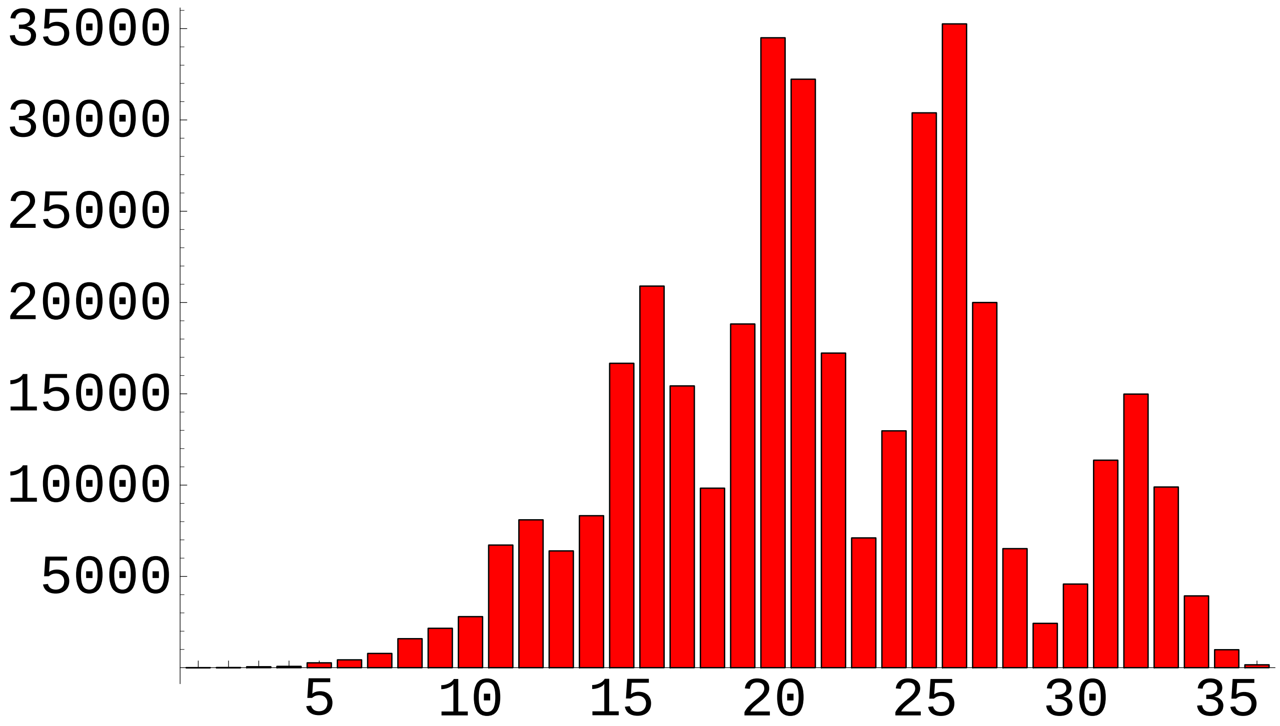
b_n och d_n uppfyller samma rekursionsformel och är noll då $n < 3$. Alltså är de lika.

Del 2

Mönstertal och Länkar

Med $\pi \in \mathcal{S}_n$ definierar vi mönstertalet(av ordning k), $\tau_k(\pi)$, som antalet olika mönster av längd k som π innehåller.

$$R_i^{(n,k)} \quad = \quad \text{antalet permutationer av längd } n \text{ som innehåller exakt } i \text{ olika mönster av längd } k.$$



Figur 1: $R_i^{(9,7)}$

Med $\pi \in \mathcal{S}_n$, är $\pi_\chi(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ det mönster av längd $(n-m)$ vi får när vi stryker elementen $\{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$ från π.

Exempel: Låt $\pi = 453621$. Då är $\pi_\chi(4,6) = \mathrm{red}(5321) = 4321$ och $\pi_\chi(5,6) = \mathrm{red}(4321) = 4321$.

Om i och $(i+1)$ är intilliggande i π, så är $\pi_\chi(i, m) = \pi_\chi(i+1, m)$.

Om i och $(i+2)$ är intilliggande i π, så är $\pi_\chi(i, i+1) = \pi_\chi(i+2, i+1)$

Om π har en delsekvens, $\{i+1, m, i\}$, så är $\pi_\chi(i+1, m) = \pi_\chi(m, i)$.

Om i står intill $(i+1)$ i π bildar de en länk i π.

Om i står intill $(i+2)$ eller om i och $(i+1)$ är åtskilda av endast ett element i π, har vi en bindning i π.

Länkar

$$A_{n,k} \quad = \quad \text{antalet permutationer av längden } n \text{ med } k \text{ länkar.}$$

$$b_{n,k} \quad = \quad \text{antalet permutationer av längden } n \text{ med } k \text{ länkar,}$$

där n är länkad.

Tabell 1: $A_{n,k}$

$k \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	0	0	2	14	90	646	5242	47622
1		2	4	10	40	239	1580	12434	110329
2			2	10	48	256	1670	12846	112820
3				2	16	120	888	7198	64968
4					2	22	226	2198	22120
5						2	28	366	4448
6							2	34	540
7								2	40
8									2

$A_{n,k}$ och $b_{n,k}$ uppfyller rekursionssystemet

$$\begin{cases} A_{n,k} &=& 2A_{n-1,k-1} - b_{n-1,k-1} + (n-k-2)A_{n-1,k} + 2b_{n-1,k} + \\ & & (k+1)A_{n-1,k+1} - b_{n-1,k+1} \\ b_{n,k} &=& 2A_{n-1,k-1} - b_{n-1,k-1} + b_{n-1,k} \end{cases}$$

med villkoren

$$\begin{cases} A_{n,k} &=& 0 \quad \text{när } k < 0 \text{ eller } k \geq n \\ b_{n,k} &=& 0 \quad \text{när } k < 1 \text{ eller } k \geq n \\ A_{1,0} &=& 1 \end{cases}$$

Diagonalpolynom

$$\begin{aligned} D_k^m &= \text{antalet permutationer av längden } (m+k+1) \text{ med } k \text{ länkar} \\ &\quad \text{och } m \text{ “ickelänkar”.} \\ c_k^m &= \text{antalet permutationer av längden } (m+k+1) \text{ med } k \text{ länkar} \\ &\quad \text{och } m \text{ “ickelänkar”, där } n \text{ är länkad.} \end{aligned}$$

Tabell 2: D_k^m

$k \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8	m
0	1	0	0	2	14	90	646	5242	
1		2	4	10	40	239	1580	12434	
2			2	10	48	256	1670	12846	6
3				2	16	120	888	7198	5
4					2	22	226	2198	4
5						2	28	366	3
6							2	34	2
7								2	1
									0

Elementen i andra diagonalen ges av

$$\begin{cases} D_k^1 &= 6k-2 \\ c_k^1 &= 6k-4 \end{cases}$$

Sats: Talen D_k^m och c_k^m, med m fixt och $k \geq 1$, ges av polynom av grad m. Koefficienten för den ledande termen, g_m, är samma för dessa polynom och den uppfyller rekursionsformeln

$$mg_m = (2m+1)g_{m-1} + 2g_{m-2}.$$

Vi kallar $P_m(k) = D_k^m$ det m:te diagonalpolynomet.

$$
\begin{aligned}
D_j^m - D_{j-1}^m &= (m-1)D_{j-1}^{m-1} + c_{j-1}^{m-1} + jD_j^{m-2} - c_j^{m-2} + \\
&\quad (m-1)D_k^{m-1} + 2c_j^{m-1} + (j+1)D_{j+1}^{m-2} - c_{j+1}^{m-2}
\end{aligned}
$$

Användning av induktionsantagandet ger

$$
\begin{aligned}
D_j^m - D_{j-1}^m &= ((2m+1)g_{m-1} + 2g_{m-2})j^{m-1} + \mathsf{TLG}. \\
D_k^m &= D_1^m + \sum_{j=2}^{k} \left(((2m+1)g_{m-1} + 2g_{m-2})j^{m-1} + \mathsf{TLG} \right). \\
D_k^m &= ((2m+1)g_{m-1} + 2g_{m-2})j^m/m + \mathsf{TLG}
\end{aligned}
$$

De första diagonalpolynomen är

$$
\begin{aligned}
P_0(k) &= 2 \\
P_1(k) &= -2 + 6k \\
P_2(k) &= 6 - 13k + 17k^2 \\
P_3(k) &= -22 + \frac{217}{3}k - 54k^2 + \frac{131}{3}k^3 \\
P_4(k) &= 134 - \frac{1811}{6}k + \frac{1897}{4}k^2 - \frac{1099}{6}k^3 + \frac{427}{4}k^4 \\
P_5(k) &= -630 + \frac{25321}{10}k - \frac{28133}{12}k^2 + \frac{27907}{12}k^3 - \frac{6667}{12}k^4 + \frac{15139}{60}k^5
\end{aligned}
$$

m	$P_m(0)$	$A_{m+1,0}$	$P_m(0) - A_{m+1,0}$
0	2	1	1
1	-2	0	-2
2	6	0	6
3	-22	2	-24
4	134	14	120
5	-630	90	-720

Förnodan 1 *Mellan $P_m(0)$ och $A_{m+1,0}$ har vi relationen*

$$P_m(0) - A_{m+1,0} = (-1)^m (m+1)!$$

Vi tar en titt på diagonalpolynomen i punkten $k = -1$.

$$\begin{aligned} P_0(-1) &= 2 = 2 \cdot 1 \cdot 1! \\ -P_1(-1) &= 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2! \\ P_2(-1) &= 36 = 2 \cdot 3 \cdot 3! \\ -P_3(-1) &= 192 = 2 \cdot 4 \cdot 4! \\ P_4(-1) &= 1200 = 2 \cdot 5 \cdot 5! \\ -P_5(-1) &= 8640 = 2 \cdot 6 \cdot 6! \end{aligned}$$

Förnodan 2 $(-1)^m P_m(-1) = 2 \cdot (m+1) \cdot (m+1)!$.