

Tentamina efter Introduktionskursen i matematik Chalmers 1990–2000



Institutionen för matematik
Chalmers och Göteborgs universitet
Göteborg 2001, version 7 mars 2001

GREGER CRONQUIST (sammanställning)
ROLF PETTERSSON

Förord

Denna samling av 15 tentamina givna vid Chalmers 1990–2000 skall ses som ett komplement till kompendiet "Kort förberedande kurs för blivande teknologer" som tidigare distribuerats under sommaren till samtliga antagna vid civilingenjörsutbildningar i Sverige (denna kurs finns också på vår hemsida). Samlingen är tänkt att ytterligare hjälpa till att förbereda dig inför de grundläggande matematikkurserna som ges vid civilingenjörsutbildningen.

Introduktionskursen i matematik på Chalmers ges traditionellt under de två första veckorna vid högskolan och bör huvudsakligen vara en ren repetitionskurs av några delar av gymnasiematematiken. Kursen behandlar främst grundläggande räknefärdigheter som är en viktig bas att stå på inför de fortsatta matematik- och ingenjörsstudierna. Kan man det enkla blir det lättare att lära sig det som är lite svårare.

Skrivningstiden på Chalmers är normalt 4 timmar, och försök klara så mycket som möjligt av tentan på denna tid; det ger en nyttig träning att räkna snabbt. Maxpoängen vid varje tenta är 50 poäng, och gränsen för godkänt brukar ligga på 20 poäng. De första fem till sex uppgifterna är "standarduppgifter", och dem bör du klara. De två eller tre sista uppgifterna på varje tenta är det inte nödvändigt att gråta sig till sömns över om man inte klarar inom tidsgränsen, men de är definitivt lösbara, så försök klara även dem, gärna tillsammans med någon kamrat eller som ett litet grupparbete. Utnyttja också din lärare om du stöter på problem.

Göteborg, mars 2001

Greger Cronquist, greger@math.chalmers.se
Rolf Pettersson, rolfp@math.chalmers.se

Chalmers: www.chalmers.se
Sök Chalmers: se.chalmers.se
Matematik, Chalmers: www.math.chalmers.se (kurskompendiet + denna samling)

Innehåll

TENTAMINA

1990 I	1
1990 II	2
1991 I	3
1991 II	4
1992	5
1993	6
1994 I	7
1994 II	8
1995 I	9
1995 II	10
1996	11
1997	12
1998	13
1999	14
2000	15
FACIT	17

TENTAMINA

Instruktioner

- Inga hjälpmedel är tillåtna förutom penna och papper.
- Tentamina är anpassade för att klaras av på 4 timmar. Försök att klara så mycket som möjligt på denna tid.
- För godkänt krävs minst 20 poäng. (30 poäng för VG, 40 poäng för MVG.)
- Det är ofta möjligt att kontrollera att man räknat rätt. I de fall detta är möjligt, gör det!

1990 I

1. Bestäm exakta värden på reella lösningar till ekvationen

a) $3 + 2 \ln(1 + x) = 0$, (3 p)

b) $x - 4\sqrt{x} - 3 = 0$. (5 p)

2. För vilka reella tal x gäller att (6 p)

$$\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} \geq \frac{x - 4}{x + 2} \quad ?$$

3. Bestäm ekvationer för tangent respektive normal till kurvan

$$y = 2 \ln \left| 5 \tan \left(\frac{3\pi}{x} \right) \right|$$

i den punkt på kurvan, där $x = 4$. (6 p)

4. Bestäm alla vinklar x mellan 0° och 360° , som satisfierar ekvationen (6 p)

$$4 \cos^3 x - 4 \sin^2 x - 11 \cos x - 2 = 0,$$

5. Beräkna arean av triangelytan med hörnen $(2, -4)$, $(4, 9)$, $(-2, -1)$. (6 p)

6. Bestäm ekvationer för gemensamma tangenter till kurvorna (6 p)

$$y = 2(x + 1)^2 \quad \text{och} \quad y = -(x - 1)^2 - 14,$$

7. Bevisa att för en (allmän) triangel med sidorna a , b och c och motstående vinklar A , B och C gäller formeln (tangensteoremet) (6 p)

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{\tan \frac{A - B}{2}}{\tan \frac{A + B}{2}},$$

8. Ett rakt regelbundet tresidigt prisma med baskanten a skall snett avskäras med ett plan, så att snittytan blir en halv kvadrat. Beräkna denna ytas area. (Ledning: Basytan är en liksidig triangel med sidan a .) (6 p)

1990 II

1. Bestäm ekvationer för tangent respektive normal till kurvan

$$y = \frac{3x - 4\sqrt{x} + 2}{x - 2\sqrt{x} + 3}$$

i den punkt på kurvan, där $x = 4$. (6 p)

2. Bestäm alla reella lösningar till ekvationen (6 p)

$$5x + 1 + 2\sqrt{6x^2 + 7} = 0$$

3. a) Bestäm alla vinklar mellan 0° och 360° som satisfierar ekvationen (5 p)

$$2 \sin^2 x + 3 \sin x + 1 = 0,$$

b) Beräkna det *exakta* värdet av $\tan(4x)$, om $\tan x = \frac{1}{4}$. (3 p)

4. För vilka reella tal x gäller att (6 p)

$$\frac{7 - 5x^2}{x^2 - 5x + 6} \leq \frac{7 + 5x^2}{x^2 + 5x + 6} ?$$

5. En cylindrisk plåttank skall ha en given volym V . Materialkostnaden per ytenhet är för tankens lock och botten k_1 och för tankens vägg (cylinderns mantelyta) k_2 . Beräkna kvoten (h/R) mellan cylinderns höjd h och radie R , då den totala materialkostnaden är så liten som möjligt. (Ledning: Svaret innehåller parametrarna k_1 och k_2 .) (6 p)

6. Beräkna arean av området innanför 5-hörningen med hörnen (i ordning) $(3, -2)$, $(6, 2)$, $(1, 7)$, $(-4, 3)$ och $(-1, -4)$. (6 p)

7. Bestäm riktningskoefficienterna k för gemensamma tangenter till kurvorna (6 p)

$$x^2 + 4y^2 = 4 \quad \text{och} \quad x^2 + (y - 3)^2 = 1$$

8. I en regelbunden tresidig pyramid är vinkeln α mellan en sidokant och basytan och vinkeln β mellan en sidoyta och basytan komplementvinklar (dvs. $\alpha + \beta = 90^\circ$). Beräkna vinkeln γ mellan två sidoytor. (Ledning: Basytan är en liksidig triangel och sidoytorna likbenta trianglar.) (6 p)

1991 I

1. Lös ekvationssystemet

(6 p)

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + 3z = 3 \\ 3x + 2y - 2z = 4, \end{cases}$$

2. Bestäm ekvationer för tangent respektive normal till kurvan

$$y = \frac{(3x^2 + 5x + 1)^2}{(2x^3 + 5x^2 - 2)^3}$$

i den punkt, där $x = -2$.

(6 p)

3. Bestäm alla vinklar x mellan 0° och 360° , som satisfierar ekvationen

$$2 \sin^3 x - 15 \sin x - 9 = 0,$$

(Ledning: $\sin v = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ för $v \approx 39,3^\circ$.)

(6 p)

4. För vilka reella tal x gäller att

(6 p)

$$x^5 + x^4 + 4x > 4x^3 + 2x^2 ?$$

5. a) Lös (för $x > 0$) ekvationen $(3x)^{\ln 3} = (5x)^{\ln 5}$ (samt förenkla svaret). (4 p)

b) Bestäm (om möjligt) y som funktion av x , om x och y är reella och satisfierar ekvationen $x^2 \ln y + y^2 = 1$. (4 p)

6. Bisektrisen till vinkeln A i triangeln ABC delar sidan BC i förhållandet $3 : 4$. Vinkeln B är 60° större än vinkeln C . Bestäm triangelns vinklar, genom att ange tangensvärdet för respektive vinkel. (6 p)

7. En (rät) cirkulär kon inskrives i en sfär, som har radien R . Beräkna konens maximala volym. (6 p)

8. Om de fyra personerna Anna, Bengt, Cecilia och David vet man, att de talar sanning med sannolikheten $\frac{1}{3}$ och ljuger med sannolikheten $\frac{2}{3}$. Vi får nu från säker källa höra att: "Anna intygar att Bengt förnekar att Cecilia påstår att David ljuger". Hur stor är då sannolikheten att David talar sanning? (Det förutsättes, att samtliga personer har gjort ett uttalande.) (För lösningen använd enkel logik med bl.a. multiplikationsprincipen för sannolikheter.) (6 p)

1991 II

1. a) Bestäm alla reella lösningar till ekvationen $2 \cdot 3^{2x} - 3^{x+1} - 20 = 0$. (5 p)
b) För vilka reella tal x gäller att $\frac{1}{x-2} \geq \frac{2}{x}$? (3 p)

2. Bestäm ekvationer för tangent respektive normal till kurvan

$$y = \sqrt[3]{4e^{2x+2} + 3^{x+1} + 1}$$

i den punkt, där $x = -1$. (6 p)

3. Lös ekvationssystemet (6 p)

$$\begin{cases} x & -y & -2z & +w & = 5 \\ x & +2y & +3z & +2w & = 3 \\ 2x & +2y & +z & +w & = 7 \\ 3x & -2y & -z & +w & = 8, \end{cases}$$

4. Bestäm alla reella lösningar till ekvationen (6 p)

$$x^{3/2} - 4x + 9 = 0$$

5. Bevisa att

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin^3 x + \cos^3 x \leq 1 \quad \text{för} \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},$$

(Ledning: Bestäm maximum och minimum av uttrycket mellan olikheterna.) (6 p)

6. Beräkna *exakta* värdet av produkten $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ$. (6 p)

7. En fyrhörning $ABCD$ är inskriven i en cirkel. Vinkeln B är 3 gånger så stor som vinkeln A , och längderna av "diagonalerna" AC och BD förhåller sig som 3 : 4. Bestäm fyrhörningens vinklar, genom att ange sinusvärdet för respektive vinkel. (6 p)

8. Undersök om polynomet (6 p)

$$x^{33} + x^{23} - x^{13} - x^3$$

är delbart med polynomet

$$x^3 + x^2 + x + 1,$$

1992

1. a) Bestäm alla vinklar x mellan 0° och 360° , som satisfierar ekvationen (5 p)

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0,$$

- b) Lös ekvationen $2^{x+2} - 3 \cdot 2^{x-1} = 25$. (3 p)

2. En triangel har sidlängderna 3, 5 och 7 (längdenheter). Bestäm triangelns vinklar (t.ex. genom att ange cosinusvärdet för respektive vinkel). (6 p)

3. Rita kurvan $y = 3 + 15x^4 + 6x^5 - 5x^6$ i sina huvuddrag med angivande av (lokala) maximipunkter och minimipunkter. (6 p)

4. Sök reella lösningar till ekvationen (6 p)

$$2\sqrt{3x-2} + \sqrt{2x-1} = 2\sqrt{x},$$

5. Beräkna exakta värdet av $\sin(3x) + \sin(5x)$, om $\sin x = \frac{1}{3}$. (6 p)

6. Bestäm ekvationer för tangent respektive normal till kurvan $x^y + y^x = 17$ i punkten $(2, 3)$. (6 p)

7. Ljusstrålar parallella med y -axeln reflekteras i parabeln $y = cx^2$, så att den infallande strålen (AP) och den reflekterade strålen (PB) bildar lika stora vinklar med parabelns tangent i punkten P . Bevisa att (alla) de reflekterade strålarna går genom en fix punkt och bestäm denna punkt. (6 p)

8. En rak cirkulär kon har lika stor (total) begränsningsyta som en given sfär. Bestäm förhållandet mellan konens och sfärens volymer, när konens volym är så stor som möjligt. (6 p)

1993

1. a) Bestäm reella lösningar till ekvationen (3 p)

$$4e^{2x} + 4e^x - 3 = 0,$$

- b) För vilka reella tal x gäller att (3 p)

$$\frac{x}{x-1} > \frac{1}{x+1} ?$$

2. Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

a) $\cos(13x) = \cos(5x),$ (2 p)

b) $\sin(13x) = \sin(5x),$ (2 p)

c) $\cos(13x) = \sin(5x).$ (2 p)

3. Bestäm ekvationer för tangent respektive normal till kurvan

$$y = \frac{\frac{2x+1}{3x-1} + \frac{4x+3}{5x-3}}{\frac{4x-1}{5x+1} + \frac{6x+3}{7x-1}}$$

i den punkt, där $x = 1.$ (6 p)

4. Bestäm *samtliga* rötter till ekvationen (6 p)

$$4x^{12} - 16x^8 + 19x^4 - 6 = 0,$$

5. Bestäm alla (reella) rötter till ekvationen (6 p)

$$\ln(2-x) + \ln(x+1) = \ln|x-1|,$$

6. En triangel ABC har sidlängderna $|AB| = 4$, $|BC| = 5$ och $|AC| = 6$. Beräkna radien i den till sidan AC "vidskriva" cirkeln (dvs. radien i den cirkel, som tangerar sidan AC och förlängningarna av sidorna BA och BC). (6 p)

7. Rita grafen (i dess huvuddrag) till funktionen

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 6} - \sqrt{x^2 - 1},$$

med angivande av samtliga (lokala) maxi- och minimipunkter samt asymptoter. (8 p)

8. Bevisa att ett (positivt) heltal (skrivet i decimalsystemet) är delbart med 3 om och endast om summan av siffrorna (i talet) är delbar med 3. (Vad kan sägas om motsvarande uppgift om delbarhet med 9?) (6 p)

1994 I

1. a) Lös ekvationssystemet $2x + 3y = 4$, $3x + 2y = 5$. (1 p)
- b) Lös andragradsekvationen $3x^2 + 4x + 5 = 0$. (1 p)
- c) Sök reella lösningar till ekvationen $2 \ln 3 + 3 \ln x = \ln 4$. (1 p)
- d) Bestäm alla vinklar x , som satisfierar ekvationen $\sin(3x) = \frac{1}{2}$. (1 p)
- e) Bestäm *exakta* värdet av $\cos(2x)$, om $\cos x = \frac{1}{3}$. (1 p)
- f) Beräkna derivatan $f'(1)$, om $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 + 2x + 3}$. (1 p)

2. Bestäm ekvationer för tangent respektive normal till kurvan $y = \ln \left| \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3 - x + 1} \right|$ i den punkt, där $x = -2$. (6 p)

3. Bestäm alla vinklar x mellan 0° och 360° , som satisfierar ekvationen

$$3 \cot^3 x + \cot^2 x - 27 \cot x - 9 = 0,$$

(Ledning: $\tan v = 3$ för $v \approx 71,6^\circ$.) (6 p)

4. För vilka reella tal x gäller att $x^3 + 2x \leq 2x^3 - x < 2x^2 - 1$? (7 p)

5. I en punkt $P = (x_0, y_0)$ på kurvan $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ drages tangenten. Den skär koordinataxlarna i A och B . Visa att summan av sträckorna $|OA|$ och $|OB|$, där O är origo, är oberoende av hur P väljes, samt bestäm summan. (6 p)

6. a) Bestäm gränsvärdet av $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$, då x obegränsat närmar sig värdet 2. (3 p)

- b) Beräkna $\sum_{k=1}^{\infty} (2^{-3k} + 3^{-2k})$. (3 p)

7. Punkterna $(-2, -1)$ och $(1, 2)$ samt en punkt P på kurvan $y = x^3 - x$ är hörn i en triangel. Undersök hur arean av triangeln varierar, när P genomlöper kurvan. Angiv speciellt eventuella maxima och minima. (7 p)

8. Tre personer A, B och C reser tillsammans. A och B är goda vandrare, som går k kilometer per timme, medan C har ont i foten och kör en liten bil (med plats för två personer) med farten q kilometer per timme. De tre kommer överens om följande plan: De startar samtidigt och C kör A i bilen medan B går. Efter en stund släpper C av A, som går vidare, medan C återvänder för att hämta B. Därefter kör C med B i bilen tills de hinner upp A. Proceduren upprepas (så länge som nödvändigt). (6 p)

- a) Hur många kilometer i timman gör sällskapet?
- b) Hur stor del av tiden är C ensam i bilen?

1994 II

1. a) Lös ekvationssystemet $3x + 4y = 5$, $4x + 3y = 6$. (1 p)
- b) Lös andragradsekvationen $3x^2 + 4x - 5 = 0$. (1 p)
- c) Sök reella lösningar till ekvationen $3 \ln 2 + 2 \ln x = \ln 3$. (1 p)
- d) Bestäm alla vinklar x , som satisfierar ekvationen $\cos(2x) = -\frac{1}{2}$. (1 p)
- e) Bestäm *exakta* värdet av $\tan(2x)$, om $\tan x = 3$. (1 p)
- f) Beräkna derivatan $f'(1)$, om $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x^2 + x + 1}$. (1 p)

2. Bestäm ekvationer för tangent respektive normal till kurvan $y = \ln|x^2 - 3x - 6\sqrt{x}|$ i den punkt, där $x = 4$. (6 p)

3. Bestäm alla vinklar x mellan 0° och 360° , som satisfierar ekvationen

$$4 \tan^4 x + 12 \tan^3 x + 7 \tan^2 x - 3 \tan x - 2 = 0$$

(Ledning: $\tan v = 2$ för $v \approx 63,4^\circ$.) (6 p)

4. För vilka reella tal x gäller att $\frac{4x^2 + 5x + 9}{4x^2 - 9} \leq \frac{9x^2 - 5x + 4}{9x^2 - 4}$? (7 p)

5. Bestäm medelpunkt (x_0, y_0) och radie R för en cirkel, som går genom punkterna $(2, 3)$ och $(5, 1)$ samt tangerar x -axeln.

6. En parallelltrapets $ABCD$, där AB är den större av de parallella sidorna, har hörnet A i punkten $(9, 2)$ och hörnet B i punkten $(3, 5)$. Hörnet C ligger på y -axeln och hörnet D på x -axeln. (6 p)

a) Undersök inom vilket område på y -axeln punkten C kan ligga.

b) Bestäm en ekvation för sidan CD , när trapetsens area är så stor som möjligt.

7. Bestäm talet q så att ekvationen

$$x^4 - (3q + 2)x^2 + q^2 = 0$$

har fyra reella rötter i en aritmetisk följd (dvs. har rötter $r, r + k, r + 2k$ och $r + 3k$). (6 p)

8. Bestäm (om möjligt) ett positivt heltal N sådant att tredjeroten $\sqrt[3]{N}$ kan fås genom att stryka de tre sista siffrorna i talet N . Undersök om det finns flera sådana tal. (6 p)

1995 I

1. a) Bestäm på formen $ax + by = c$ en ekvation för räta linjen genom punkterna $(2, 6)$ och $(5, -1)$. (1 p)
- b) Beräkna, utan miniräknare, $\frac{35^{15} \cdot 2^{16}}{14^{14} \cdot 25^7}$. (1 p)
- c) Förenkla (så långt som möjligt) $\frac{\frac{b^2}{a+b} + a - b}{1 - \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}}$. (1 p)
- d) Bestäm $y = y(x)$, om $2y^2 - 3xy - 2x^2 = 0$. (1 p)
- e) Sök reella lösningar till ekvationen $|5x + 4| = 3$. (1 p)
- f) Förenkla så långt som möjligt

$$\frac{[(a^{-2}b^3)^3 \cdot b^{-4}]^3}{\left(\sqrt{\frac{b^2}{a^4}} \cdot \sqrt{\sqrt{\frac{1}{a}}}\right)^{12}},$$

samt ange villkor på a och b . (1 p)

2. a) Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = \ln(5 - 9x + 4x^2)$ i den punkt, där $x = 2$. (3 p)
- b) För vilka reella tal x gäller att $\frac{2}{x-2} \geq \frac{3}{x^2-2x}$? (3 p)
3. Bestäm alla lösningar till ekvationen
 - (a) $\tan(9x) + \tan(5x) = 0$, (2 p)
 - (b) $\cos(9x) + \sin(5x) = 0$, (2 p)
 - (c) $\cos(9x) + \cos(5x) = 0$. (2 p)
4. a) Bestäm *samtliga* rötter till ekvationen $27x^5 = 8x^2$. (4 p)
- b) Sök reella lösningar till ekvationen $2x + \ln(1 + e^{-x}) = 0$. (4 p)
5. En literflaska A är *full* med (apelsin)juice. En del av juicen hälls från A i en *tom* literflaska B. Därefter fylls flaskan B med vatten (så att den blir full) och omskakas. Slutligen fyller man flaskan A med blandningen från flaskan B, så att A blir full. Hur många procent juice måste det minst finnas i flaskan A? (Motivera svaret!) (5 p)
6. Rita kurvan $y = f(x)$ (i sina huvuddrag) med angivande av (lokala) maximi- och minimipunkter samt asymptoter, om $f(x) = \frac{x(x-2)^2}{(x+5)(x^2-1)}$. (7p)
7. En liksidig triangel ABC har hörn på en cirkel. Genom hörnet A drages en linje, som skär sidan BC och dessutom skär cirkeln i en punkt P . Bevisa att längden av sträckan AP är summan av längderna av BP och CP , dvs. att $|AB| = |BP| + |CP|$, oberoende av var punkten P ligger (på cirkelbågen mellan B och C). (6 p)
8. Visa att de *reella* talen mellan 0 och 1 är fler än uppräknligt många, dvs. visa att det inte kan finnas en avbildning från de naturliga talen på mängden av reella tal mellan 0 och 1. (Ledning: Skriv talen som decimalbråk. Genomför ett s.k. motsägelsebevis, dvs. antag att påståendet inte gäller, och visa att detta i så fall leder till en motsägelse.) (6 p)

1995 II

1. a) Bestäm på formen $ax + by = c$ en ekvation för räta linjen genom punkterna $(-2, 4)$ och $(5, 1)$. (1 p)
- b) Beräkna, utan miniräknare, $\frac{6^{16} \cdot 25^7}{15^{15} \cdot 16^4}$. (1 p)
- c) Förenkla (så långt som möjligt) $\frac{\frac{y+x}{y-x} - \frac{y-x}{y+x}}{\frac{y}{y-x} - 1}$. (1 p)
- d) Bestäm $y = y(x)$, om $3y^2 + 2xy - x^2 = 0$. (1 p)
- e) Sök reella lösningar till ekvationen $|3x + 5| = 4$. (1 p)
- f) Skriv på enklast möjliga form (utan att använda något rot- eller potensuttryck) (1 p)

$$\left(\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{\sqrt[5]{a^{12}}}}} \right)^5, \quad \text{om } a < 0,$$

2. a) Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = \sqrt{4x^2 - 5x + 3}$ i den punkt, där $x = 2$. (3 p)
- b) För vilka reella tal x gäller att $\frac{3x}{x+2} \leq 4x$? (3 p)
3. Bestäm alla lösningar till ekvationen
 - (a) $\sin(7x) + \sin(3x) = 0$, (2 p)
 - (b) $\cot(7x) + \cot(3x) = 0$, (2 p)
 - (c) $\sin(7x) + \cos(3x) = 0$. (2 p)
4. a) Bestäm *samtliga* rötter till ekvationen $(8x^3 + 1)^2 = 0$. (4 p)
- b) Sök reella lösningar till ekvationen $\ln(1 + 2e^x) = 2x$. (4 p)
5. En kubs volym V är proportionell mot en potens av (totala) begränsningsarean A , dvs. $A = kA^p$. Bestäm exponenten p och proportionalitetskonstanten k . (5 p)
6. Rita kurvan $y = f(x)$ (i sina huvuddrag) med angivande av (lokala) maximi- och minimipunkter samt asymptoter, om $f(x) = \frac{12(x-1)^3}{(3x-1)(x^2-4)}$. (7p)
7. Vid ett underhållningsprogram (i TV) får en tävlande välja *en* av *fem* öppnade lådor. Tävlingsledaren meddelar att *två* av de fem lådorna innehåller värdefulla vinster, medan de övriga tre är tomma. När den tävlande valt en av lådorna (som inte öppnas), öppnar ledaren en av de övriga lådorna, varvid denna låda visar sig vara tom. Den tävlande får möjlighet att ändra sitt val av låda. (Skall personen göra detta?) Beräkna sannolikheten för vinst, om den tävlande har strategin att
 - a) inte ändra sitt val av låda,
 - b) ändra sitt val av låda.
 (Motivera svaret!) (6 p)
8. Visa att de *rationella* talen mellan 0 och 1 är uppräkneligt många, dvs. angiv en metod för konstruktion av en avbildning från de naturliga talen på mängden av rationella tal mellan 0 och 1. (6 p)

1996

1. a) Förenkla (så långt som möjligt) $\frac{(a^{1/2})^{1/3} \cdot (a^{-1/3})^2}{(a^{1/4})^2 \cdot (a^{2/3})^{1/4}}$ (1 p)
 b) Bestäm kvotpolynom $K(x)$ och restpolynom $R(x)$, om polynomet $4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ divideras med $x^2 - 3x + 2$. (1 p)
 c) För vilka reella tal x gäller att $\ln(4 + x) = \ln 4 + \ln x$? (1 p)
 d) Bestäm *exakta* värdet av $\cos v$, om $\tan v = 5$ och $0 < v < \frac{\pi}{2}$. (1 p)
 e) Bestäm alla vinklar x mellan 0° och 360° , som satisfierar ekvationen $2 \cos x = -1$. (1 p)
 f) Bestäm medelpunkt och radie för cirkeln $x^2 + y^2 = 4x - 3y$. (1 p)
2. a) Bestäm ekvationer för tangent respektive normal till kurvan $y = \frac{2x^2 - 3x + 4}{x^2 - 4x + 7}$ i den punkt där $x = 1$. (4 p)
 b) Sök reella lösningar till ekvationen $2 + 4x + \sqrt{x^2 + 4} = 0$. (4 p)
3. I en triangel är två sidor 2 och 3 (cm) och mellanliggande vinkel är 135° . Bestäm den tredje sidan samt de två återstående vinklarna (t.ex. genom att ange respektive cosinusvärde). (6 p)
4. Bestäm samtliga rötter till ekvationen $2x^4 + x^3 - 3x^2 - 10x - 8 = 0$. (6 p)
5. Till kurvan $y = x + \frac{6}{x}$, $x > 0$, drages tangenten i punkten P på kurvan. Tangenten skär kurvans asymptoter ($x = 0$ och $y = x$) i punkterna A och B . Beräkna arean av triangeln AOB , där O är origo, (och visa att arean är oberoende av var P väljes). (6 p)
6. Bestäm (om möjligt) konstanterna a , b och c , så att $y(x) = (ax + b)e^{cx}$ satisfierar differentialekvationen $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 0$ med begynnelsevillkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 2$. (6 p)
7. Hur långt från en (lodrät) väggmålning, som är 4 meter hög och har underkanten 1 meter ovanför ditt öga, skall du stå för att se den så bra som möjligt (dvs. så att synvinkeln blir maximal)? (6 p)
8. Antag att $A = \frac{1}{3}(x + y + z)$ och $G = \sqrt[3]{xyz}$, där x , y och z är positiva tal. Bevisa att $G \leq A$ (och undersök även när likhet, $A = G$, gäller). (6 p)

1997

1. a) Förenkla (så långt som möjligt) $\frac{y^3-y}{y-y^2}$. (1 p)
b) Bestäm en ekvation för normalen från punkten $(3, 1)$ till linjen $3x + 4y = 5$. (1 p)
c) Beräkna derivatan $f'(x)$ för $x = 2$, om $f(x) = \ln |2 + 3x - 4x^2|$. (1 p)
d) Lös ekvationen $5 \ln x = \ln(5x)$. (2 p)
e) Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = \frac{3x+4}{5x+6}$ i den punkt, där $x = -2$. (3 p)
2. För vilka reella tal x gäller att $3x^4 + x^3 + x > x^2$? (6 p)
3. Rita kurvan $y = 2e^{-3x} - 7e^{-2x} + 4e^{-x} + 4$ (i sina huvuddrag) med angivande av lokala maxi- och minimipunkter. (6 p)
4. a) Lös ekvationen $\sin x - 7 \cos x = 5$. (Ledning: $\tan v = 7$ för $v \approx 81,9^\circ$.) (4 p)
b) Beräkna *exakta* värdet av $\tan(3x)$, om $\tan x = \frac{1}{3}$. (4 p)
5. Bestäm en ekvation för de två tangenter, som kan dragas från punkten $(2, -1)$ till parabeln $y = x^2 - x + 6$. (6 p)
6. Medianerna i en (godtycklig) triangel skär varandra i en punkt och delar triangelytan i sex delar. Bevisa att alla deltriangelarna har samma area. (4 p)
7. Antag att koefficienterna i en algebraisk ekvation

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

är *heltal* med a_n och $a_0 \neq 0$. Bevisa att om $x = \frac{p}{q}$ är en (fullständigt förkortad) *rationell* rot till ekvationen, så måste p vara heltalsfaktor i a_0 och q heltalsfaktor i a_n . (6 p)

8. I en regelbunden femhörning drages en "diagonal" från ett hörn till ett annat (icke närliggande) hörn. Beräkna förhållandet mellan diagonalens längd och längden av en sida i femhörningen. Svara utan trigonometriska funktioner. (6 p)

1998

1. a) Lös ekvationen $\frac{2}{x+2} = \frac{2}{3} - \frac{3}{4}$. (2 p)
- b) Bestäm konstanten k så att ekvationen $x^2 + y^2 + 8x - 2y + k = 0$ beskriver en cirkel med radien 3. (2 p)
- c) Beräkna derivatan $f'(x)$ för $x = \frac{\pi}{6}$, om $f(x) = 4 \cos^3 x + \tan^3 x$. (2 p)
- d) En person åker sträckan a med farten v och sedan sträckan b med farten w . Beräkna medelfarten för hela resan. (2 p)

2. Sök reella lösningar till ekvationen

- a) $2\sqrt{x^2 + 2} = x - 3$, (4 p)
- b) $\ln(3x^2 - 4x + 5) = \ln(3x^2) - \ln(4x) + \ln 5$. (4 p)

3. Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

- a) $\sin(2x) = \cos x$, (3 p)
- b) $\cos(2x) = \cos x$. (3 p)

4. Bestäm ekvationer för tangent respektive normal till kurvan

$$y = \ln \left(\frac{x^3 + 3x^2 + 4}{x^3 - 2x + 3} \right)$$

i den punkt, där $x = -1$. (6 p)

5. Rita kurvan $y = 2 - 25x + 10x^3 - x^5$ (i sina huvuddrag) med angivande av lokala maximipunkter och minimipunkter. (6 p)
6. Hörnpunkterna A , B och C i en triangel ligger på en cirkel, där A och B är ändpunkter på en diameter. En cirkel med medelpunkt P är inskriven i triangeln ABC (och tangerar alltså sidorna AB , BC och AC). Undersök hur vinkeln $\angle APB$ varierar med läget för punkten C . (4 p)
7. Beräkna volymen av den minsta raka cirkulära kon, som kan omskrivas en sfär med radien R . (6p)
8. Bevisa att alla (ljus)strålar från den ena brännpunkten i en ellips reflekteras i ellipsen, så att de går genom den andra brännpunkten. Ledning: Ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ har brännpunkterna $(-c, 0)$ och $(c, 0)$, där $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. (6p)

1999

1. a) Bestäm *exakta* värdet av $\cos v$, om $\tan v = \frac{3}{2}$ och $0^\circ < v < 90^\circ$. (1 p)
b) Bestäm på formen $y = kx + m$ en ekvation för räta linjen genom punkterna $(3, 2)$ och $(5, -4)$. (1 p)
c) Beräkna, utan miniräknare, $1999^2 - 1997^2$, (1 p)
d) Beräkna derivatan $f'(x)$ för $x = 2$, om $f(x) = \sqrt{3x^2 + 4x + 5}$. (2 p)
e) För vilka reella tal x gäller att $\frac{1}{x+3} \geq \frac{1}{3x}$? (3 p)

2. Sök reella lösningar till ekvationen

- a) $\ln x + \ln(x + 2) = 0$, (3 p)
b) $\lg x - \lg(1 - x) = 1$ (där $\lg = \log_{10}$). (3 p)

3. Bestäm samtliga rötter till ekvationen (6 p)

$$3x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 10x = 0,$$

4. Bestäm ekvationer för tangent respektive normal till kurvan

$$y = \frac{x^3 + 4x^2 - 6}{2x^3 + x^2 + 10}$$

i den punkt, där $x = -2$. (6 p)

5. Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

- a) $\sin(4x) + \cos(4x) = 0$, (2 p)
b) $2\sin^2 x = 3 - 3\cos x$. (4 p)

6. Bestäm konstanterna a , b och c så att ekvationen $x^2 + y^2 = ax + by + c$ blir en ekvation för cirkeln genom punkterna $(2, 3)$, $(5, 2)$ och $(3, -2)$. (6 p)

7. Betrakta den algebraiska ekvationen

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

och antag att alla koefficienterna $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ är *rationella* tal (med $a_n \neq 0$ och $n \geq 2$). Bevisa att om denna ekvation har en *irrationell* rot $x_1 = A + \sqrt{B}$, där A och B är rationella tal, så är även $x_2 = A - \sqrt{B}$ en rot till ekvationen. (6 p)

8. Sök den (plana) *fyrhörning* med given area, vars omkrets är minimal. Bevisa påståendet! (Ledning: Drag diagonalerna.) (6 p)

2000

1. a) Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$. (2 p)
- b) Bestäm kvotpolynom $K(x)$ och restpolynom $R(x)$, om polynomet $2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$ divideras med $x^2 + 2x - 3$. (2 p)
- c) Bestäm alla reella lösningar till ekvationen $|4x + 3| = 1$. (2 p)
- d) Bestäm alla vinklar x mellan 0° och 360° som satisfierar ekvationen $2 \sin(3x) = -1$. (2 p)

2. Sök reella lösningar till ekvationen

- a) $3e^{2x} + 2e^x - 1 = 0$, (3 p)
- b) $2 \ln(3x + 1) = 1 + \ln 2$. (3 p)

3. Bestäm ekvationer för tangent respektive normal till kurvan $y = \ln |3x^2 - 4x + 5|$ i den punkt, där $x = 2$. (6 p)

4. För vilka reella tal x gäller att $2x^4 + x^3 > 3x^2 + 10x + 8$? (6 p)

5. Antag att $\tan x = 5$. Beräkna (6 p)

- a) $\cot x$,
- b) $\cot(2x)$,
- c) $\cot(3x)$.

6. Bestäm skärningspunkten mellan cirkelarna $x^2 + y^2 = y + 6$ och $x^2 + y^2 = 3x + 4y$. (6 p)

7. Bevisa att

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} + \frac{q}{2}}$$

är en lösning till tredjegradsekvationen $x^3 + px + q = 0$. (6 p)

8. En vätska med densiteten ρ blandas med en annan vätska med densiteten ρ_0 (utan att några kemiska reaktioner inträffar). Antag att p och q anger mass- respektive volymsandelen av den första vätskan i blandningen (dvs. $100p$ och $100q$ anger mass- och volymsprocenterna). (6p)

- a) Härled en formel för sambandet mellan p och q .
- b) Bestäm maximala skillnaden mellan p och q (dvs. beräkna största värdet för $|p - q|$).

FACIT

1990 I

1. a) $-1 + e^{-3/2}$, b) $11 + 4\sqrt{7}$
2. $-2 < x < -1, -\frac{1}{2} \leq x \leq 0, 1 < x < \infty$
3. $3\pi x - 4y = 12\pi - 8 \ln 5, 4x + 3\pi y = 16 + 6\pi \ln 5$
4. $120^\circ, 240^\circ$
5. 29 areaenheter
6. $4x + y = -6, 84x - 9y = 14$
7. —
8. $3a^2/4$.

1990 II

1. $3y - x = 2, y + 3x = 14$
2. $-5 - 2\sqrt{13}$
3. a) $210^\circ, 270^\circ, 330^\circ$, b) $\frac{240}{161}$
4. $x > 3, 1 \leq x < 2, -2 < x \leq 0, x < -3$
5. $2k_1/k_2$
6. 61 areaenheter
7. $\pm\sqrt{5 \pm 2\sqrt{5}}$ (fyra fall)
8. 90°

1991 I

1. $x = 5/4, y = 7/16, z = 5/16$
2. $96x + 8y + 183 = 0, 2x - 24y + 31 = 0$
3. $320,7^\circ, 219,3^\circ$
4. $-2 < x < -\sqrt{2}, 0 < x < 1, x > \sqrt{2}$
5. a) $x = 1/15$, b) $y=1$
6. $\tan A = 7\sqrt{3}/23, \tan B = -2\sqrt{3}, \tan C = 3\sqrt{3}/5,$
7. $\frac{32\pi R^3}{81}$
8. $13/41 (= \frac{13/81}{41/81})$

1991 II

1. a) $\frac{\ln 4}{\ln 3}$, b) $x < 0, 2 < x \leq 4$
2. $12y - 11x = 35, 11y + 12x = 10$
3. $x = 13/5, y = 1, z = -6/5, w = 1$
4. $x_1 = 9, x_2 = \frac{7+\sqrt{13}}{2}$
5. —
6. $1/8$
7. $\sin A = \sin C = 3/4, \sin B = \sin D = 9/16$ (där $0 < A, D < \pi/2 < B, C < \pi$)
8. Delbart.

1992

1. a) $210^\circ, 330^\circ$, b) $x = \frac{\ln 10}{\ln 2}$
2. (cosinusvärdena) $13/14, 11/14, -1/2$ (resp.)
3. lokala max.: $f(-1) = 7, f(2) = 115$; lokala min.: $f(0) = 3$
4. $x = \frac{17-4\sqrt{15}}{2}$
5. $448/243$
6. $2(3 + 4 \ln 2)(y - 3) = -3(4 + 3 \ln 3)(x - 2), 2(4 + 3 \ln 3)(y - 3) = 2(3 + 4 \ln 2)(x - 2)$
7. $(0, y_B)$, där $y_B = \frac{1}{4c}$
8. $1/\sqrt{2}$

1993

1. a) $x = -\ln 2$, b) $x < -1, x > 1$
2. a) $n\pi/4, n\pi/9$, b) $n\pi/4, \pi/18 + n\pi/9$, c) $-\pi/16 + n\pi/4, \pi/36 + n\pi/9, n$ heltal
3. $27x + 8y = 47, 54y - 16x = 119$
4. $\pm 2^{1/4}, \pm i 2^{1/4}, \pm (3/2)^{1/4}, \pm i (3/2)^{1/4}, \pm 2^{-1/4}, \pm i 2^{-1/4}$
5. $x_1 = 1 - \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{3}$
6. $5\sqrt{7}/2$
7. Lokala maxima: $f(-5) = -\sqrt{6}, f(-1) = \sqrt{2}, f(1) = 2\sqrt{3}$. Lokala minima: $f(-3) = -2\sqrt{2}, f(-2) = -\sqrt{3}$. Asymptoter: $y = \pm 5/2$
8. —

1994 I

1. a) $x = 7/5, y = 2/5$, b) $x_{1,2} = \frac{-2 \pm i\sqrt{11}}{2}$, c) $x = (4/9)^{1/3}$, d) $x_1 = \pi/18 + n2\pi/3$,
 $x_2 = 5\pi/18 + n2\pi/3, n$ heltal, e) $-7/9$, f) $-7/18$
2. $y - \ln 2 = \frac{8}{5}(x + 2), y - \ln 2 = -\frac{5}{8}(x + 2)$
3. $18,4^\circ, 108,4^\circ, 161,6^\circ, 198,4^\circ, 288,4^\circ, 341,6^\circ$
4. $-\sqrt{3} \leq x < -1/\sqrt{2}$
5. 4
6. a) $1/3$, b) $15/56$
7. Lokala maxima för $x_P = \pm\sqrt{2/3}$, lokala minima för $x_P = -1, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
8. a) $\frac{q(q+3k)}{3q+k}$, b) $\frac{q-k}{3q+k}$

1994 II

1. a) $x = 9/7, y = 2/7$, b) $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{19}}{3}$, c) $x = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, d) $60^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 300^\circ$
e) $-3/4$, f) $-1/3$
2. $7x + 16y = 28 + 48 \ln 2, 16x - 7y = 64 - 21 \ln 2$
3. $116,6^\circ, 296,6^\circ, 135^\circ, 315^\circ, 26,6^\circ, 206,6^\circ, 153,4^\circ, 333,4^\circ$
4. $x \leq -1 - \sqrt{2}, -3/2 < x < -2/3, 0 \leq x \leq -1 + \sqrt{2}, 2/3 < x < 3/2$
5. $\left(\frac{13+\sqrt{39}}{2}, \frac{26+\sqrt{351}}{4}\right), \left(\frac{13-\sqrt{39}}{2}, \frac{26-\sqrt{351}}{4}\right)$
6. a) $0 \leq c \leq 3$, b) $2x + 4y = 7$
7. $q = 6$ eller $q = -6/19$
8. Endast $N = 32^3$

1995 I

1. a) $7x + 3y = 32$, b) 140, c) $\frac{a(a+b)}{4b}$, d) $y = 2x$ eller $y = -x/2$, e) $x_1 = -1/5$,
 $x_2 = -7/5$, f) $a^9 b^3, a > 0, b \neq 0$
2. a) $y - \ln 3 = \frac{7}{3}(x - 2)$, b) $0 < x \leq 3/2, x > 2$
3. a) $n\pi/14$, b) $\pi/8 + n\pi/2, -\pi/28 + n\pi/7$, c) $\pi/4 + n\pi/2, -\pi/14 + n\pi/7, n$ heltal
4. a) $x_1 = x_2 = 0, x_3 = 2/3, x_{4,5} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{3}$, b) $x = \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$
5. 75%

6. Asymptoter: $x = -5$, $x = \pm 1$ och $y = 1$. Lokala maxima: $f(-2) = -32/9$, lokala minima: $f(2) = 0$
7. —
8. —

1995 II

1. a) $3x + 7y = 22$, b) $3/5$, c) $\frac{4y}{x+y}$, d) $y = -x$ eller $y = x/3$, e) $x_1 = -1/3$, $x_2 = -3$, f) $-a$
2. a) $11x - 6y = 4$, b) $x \geq 0$, $-2 < x \leq -5/4$
3. a) $n\pi/5$, $\pi/4 + n\pi/2$ b) $n\pi/10$, c) $-\pi/8 + n\pi/2$, $-\pi/20 + n\pi/5$, n heltal
4. a) $x_1 = x_2 = -1/2$, $x_3 = x_4 = \frac{1+i\sqrt{3}}{4}$, $x_5 = x_6 = \frac{1-i\sqrt{3}}{4}$, b) $x = \ln(1 + \sqrt{2})$
5. $p = 3/2$, $k = 6^{-3/2}$
6. Asymptoter: $x = 1/3$, $x = \pm 2$ och $y = 4$. Lokala maxima: $f(0) = -3$, lokala minima: $f(13/4) = 2916/1225$ (Terrasspunkt i $f(1) = 0$.)
7. a) $2/5$, b) $8/15$
8. —

1996

1. a) $a^{-7/6}$, b) $K(x) = 4x + 9$, $R(x) = 21x - 19$, c) $x = 4/3$, d) $1/\sqrt{26}$, e) 120° , 240° , f) $MP = (2, -3/2)$, $R = 5/2$
2. a) $8y - 5x = 1$, $20y + 32x = 47$, b) $x = -16/15$
3. $\cos A = \frac{4+3\sqrt{2}}{2\sqrt{13+6\sqrt{2}}}$, $\cos B = \frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{13+6\sqrt{2}}}$
4. $-1, 2, -(3 \pm i\sqrt{23})/4$
5. 12 (a.e.)
6. $a = 4$, $b = 1$, $c = -2$
7. $\sqrt{5}$ (m)
8. —

1997

1. a) $-(y+1)$, b) $4x-3y=9$, c) $13/8$, d) $\sqrt[4]{5}$, e) $x+8y=2$
2. $x < -1, x > 0$
3. Lokalt minimum: $y(-\ln 2) = 0$, Lokalt maximum: $y(\ln 3) = 145/27$
4. a) $126,9^\circ + n360^\circ, 216,9^\circ + n360^\circ, n$ heltal, b) $13/9$
5. $y = 5 - 3x, y = 9x - 19$
6. —
7. —
8. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

1998

1. a) $x = -26$, b) $k = 8$, c) $-19/6$, d) $\frac{(a+b)vw}{aw+bv}$
2. a) Ingen (reell) lösning, b) $x_1 = 4/3, x_2 = 5/4$
3. a) $\pi/6 + n2\pi/3, \pi/2 + n2\pi$, b) $n2\pi/3, n$ heltal
4. $3x + 4y = 4 \ln(3/2) - 3$ respektive $3y - 4x = 4 + 4 \ln(3/2)$
5. Lokala maxima: $y(-1) = 18, y(\sqrt{5}) = 2$; Lokala minima: $y(-\sqrt{5}) = 2, y(1) = -14$
6. 135° (konstant)
7. $\frac{8\pi R^3}{3}$
8. —

1999

1. a) $2/\sqrt{13}$, b) $y = -3x + 11$, c) 7992, d) $8/5$, e) $-3 < x < 0, x \geq 3/2$
2. a) $\sqrt{2} - 1$, b) $10/11$
3. $x_1 = 0, x_2 = 2, x_{3,4} = (-2 \pm i\sqrt{11})/3$
4. $8x + y = -17, x - 8y = 6$
5. a) $-\pi/16 + n\pi/4$, b) $2n\pi, \pm\pi/3 + 2n\pi, n$ heltal
6. $a = 40/7, b = 8/7, c = -13/7$
7. —
8. Den sökta fyhörningen är kvadraten.

2000

1. a) $x = -1, y = 2$, b) $K(x) = 2x - 7, R(x) = 24x - 26$, c) $x_1 = -1/2, x_2 = -1$,
d) $70^\circ, 110^\circ, 190^\circ, 230^\circ, 310^\circ, 350^\circ$,
2. a) $x = -\ln 3$, b) $x = (\sqrt{2}e - 1)/3$
3. $9y - 8x = 18 \ln 3 - 16, 8y + 9x = 16 \ln 3 + 18$
4. $x < -1, x > 2$
5. a) $1/5$, b) $-12/5$, c) $37/55$
6. $\left(\frac{3 \pm \sqrt{41}}{4}, \frac{5 \mp \sqrt{41}}{4} \right)$
7. —
8. a) $\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{1-1/p}{1-1/q}$, b) $\max |p - q| = \left| \frac{\sqrt{\rho} - \sqrt{\rho_0}}{\sqrt{\rho} + \sqrt{\rho_0}} \right|$