

# ESS011: Matematisk statistik och signalbehandling

Tid: 14:00-18:00, Datum: 2011-01-12

**Examinatorer:** José Sánchez och Bill Karlström

**Jour:** Bill Karlström, tel. 070-624 44 88. José Sánchez, tel. 031-772 53 77.

**Hjälpmedel:** Utdelad formelsamling, Formelsamling "Beta", Räknedosa.

**Betygsgränser:** För betyg 3 krävs 16 poäng, för betyg 4 krävs 24 poäng, för betyg 5 krävs 32 poäng, max. 40 poäng.

Fullständig och välmotiverad lösning på uppgift krävs för att full poäng skall erhållas.

Om du redan är godkänd på signalbehandlingsdelen från tidigare år kan du hoppa över signalbehandlingsuppgiften (sista uppgiften) men ange då detta på ett separat blad!

---

## Matematisk statistik

1. Rita i ett koordinatsystem mängden  $\{(x, y) : x = 1, 2, \dots, 6, y = 1, 2, \dots, 6\}$ . Den kan uppfattas som utfallsrum vid kast med en tärning två gånger. Alla utfall är lika sannolika, dvs  $P(x, y) = 1/36$ . Beräkna sannolikheten för följande händelser.
  - (a) Poängsumman mindre än sex. **(1p)**
  - (b) Samma poäng vid båda kasten. **(2p)**
  - (c) Åtminstone ett av kasten ger precis två poäng. **(1p)**
  - (d) Åtminstone ett av kasten ger minst fem poäng. **(2p)**
2. Väntetiden  $X$  (enhet: minut) från öppningsdags till dess första kunden kommer in i en affär, är en s.v. med fördelningsfunktionen

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x < 0 \\ 1 - e^{-0.4x} & \text{om } x \geq 0 \end{cases}$$

Beräkna sannolikheten att första kunden dröjer

- a) högst 3 minuter. **(1p)**
  - b) minst 4 minuter. **(1p)**
  - c) mellan 3 och 4 minuter. **(1p)**
  - d) högst 3 eller minst 4 minuter. **(1p)**
  - e) precis 2.5 minuter. **(1p)**
3. Förklara följande begrepp inom punktskattning:
    - a) Stickprov. **(1p)**
    - b) Skattare och skattning. **(1p)**
    - c) Väntevärdesriktig (unbiased) skattare. **(1p)**
    - d) Vad är ett lämpligt kriterium för val mellan två väntevärdesriktiga skattare? **(1p)**
  4. Låt  $X_1, \dots, X_n$  vara ett stickprov på  $X \sim \text{Gamma}(k, \theta)$  (där  $f_X(x) = x^{k-1} \frac{e^{-x/\theta}}{\theta^k \Gamma(k)}$ ,  $x > 0$ ,  $k > 0$ ,  $\theta > 0$  samt  $\mathbb{E}[X] = k\theta$ ). Härled maximum-likelihoodskattaren för  $\theta$ . Är detta en väntevärdesriktig (unbiased) skattare? **(6p)**
  5. Man ville undersöka sänkningen av blodtrycket (enhet: mm Hg) vid användning av ett visst preparat. Man mätte blodtrycket på var och en av 10 försökspersoner, gav därefter varje person en viss dos av preparatet (samma dos för alla) och gjorde efter 20 minuter ytterligare en blodtrycksmätning per person. Modell: mätresultatet före och efter på person nr  $i$  är  $N(\mu_i, \sigma_1)$  respektive  $N(\mu_i + \Delta, \sigma_2)$ .

(a) Tolka parametrarna (i ord)  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{10}$  och  $\Delta$ . **(2p)**

(b) Som försökresultat fick man

| Person nr       | 1  | 2  | 3  | 4  | 5   | 6  | 7  | 8  | 9  | 10  |
|-----------------|----|----|----|----|-----|----|----|----|----|-----|
| Blodtryck före  | 75 | 70 | 75 | 65 | 95  | 70 | 65 | 70 | 65 | 90  |
| Blodtryck efter | 85 | 70 | 80 | 80 | 100 | 90 | 80 | 75 | 90 | 100 |

Beräkna ett 95% konfidensintervall för  $\Delta$ . **(3p)**

6. Man har anledning förmoda att molekylvikterna för två kemiska föreningar  $A$  och  $B$  är lika. För att undersöka detta har man gjort 6 molekylviktsbestämningar på  $A$  och 8 på  $B$ . Den använda mätmetoden ger ett mätfel som är  $N(0, \sigma)$ . Mätfelen i olika mätningar kan anses vara oberoende. Följande värden erhöles:

|                     |        |        |        |        |        |        |        |        |
|---------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Molekylvikt för $A$ | 174.18 | 174.30 | 174.23 | 174.29 | 174.36 | 174.25 |        |        |
| Molekylvikt för $B$ | 174.19 | 174.40 | 174.20 | 174.35 | 174.32 | 174.14 | 174.27 | 174.34 |

(a) Konstruera ett test på nivån 5% av hypotesen

$H_0$ :  $A$  och  $B$  har samma molekylvikt, mot alternativet

$H_1$ :  $A$  och  $B$  har olika molekylvikt. **(3p)**

(b) Gör numeriska beräkningar och ange testets utfall. **(3p)**

7. För att undersöka om en viss dimension  $y$  hos en tillverkad artikel beror på inställningen  $x$  av en viss maskin, mätte man  $y$  för 7 olika inställningar av maskinen, varvid man fick följande värden

|       |     |     |     |     |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $x$ : | 1.0 | 2.0 | 3.0 | 4.0 | 5.0 | 6.0 | 7.0 |
| $y$ : | 0.9 | 1.4 | 2.2 | 2.7 | 3.2 | 4.3 | 4.2 |

(a) Skatta regressionslinjens parametrar (interceptet  $\alpha$  och lutningen  $\beta$ ) samt rita in linjen i koordinatsystemet. **(2p)**

(b) Om man vill ha väntevärdet 2.5 för dimensionen  $y$ , vilken inställning av  $x$  skall man då ha? **(1p)**

(c) Bestäm 95% konfidensintervall för interceptet  $\alpha$  och lutningen  $\beta$ . **(2p)**

## Signalbehandling

8. En störning på 50Hz skall filtreras bort med ett diskret notchfilter vars samplingsfrekvens är 300Hz.

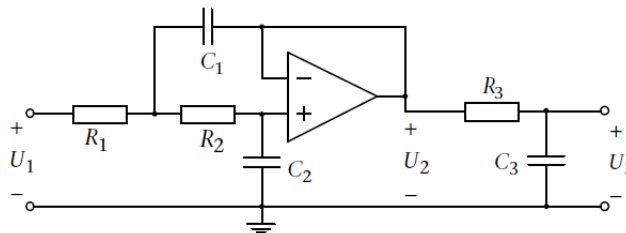
(a) Låt filtrets poler ha beloppet 0.9 och bestäm filtrets poler och nollställen. **(0.5 p)**

(b) Bestäm filtrets överföringsfunktion  $H(z)$  så att  $H(1) = 1$ . **(0.5 p)**

9. Nedanstående krets utgör ett 3:e ordningens LP-filter.

(a) Bestäm vinklarna hos filtrets tre poler samt 2:a-gradslänkens  $Q$ -värde. **(0.5 p)**

(b) Låt alla resistorer ha resistansen och bestäm kapacitanserna så att filtret blir maximalt platt, dvs ett Butterworthfilter, med övre gränsvinkelfrekvens (-3dB) 4krad/s. OP:n får betraktas som ideal. **(1.5 p)**



Den aktiva 2:a-gradslänken har överföringsfunktionen

$$H(s) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}{s^2 + s \frac{C_2(R_1 + R_2)}{R_1 R_2 C_1 C_2} + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$