

ESS011: Matematisk statistik och signalbehandling

Tid: 8:30-12:30, Datum: 2011-05-24

Examinatorer: José Sánchez och Bill Karlström

Jour: Bill Karlström, tel. 070-624 44 88. José Sánchez, tel. 031-772 53 77.

Hjälpmedel: Utdelad formelsamling, Formelsamling "Beta", Räknedosa.

Betygsgränser: För betyg 3 krävs 14 poäng, för betyg 4 krävs 21 poäng, för betyg 5 krävs 28 poäng, max. 35 poäng.

Fullständig och välmotiverad lösning på uppgift krävs för att full poäng skall erhållas.

Om du redan är godkänd på signalbehandlingsdelen från tidigare år kan du hoppa över signalbehandlingsuppgiften (sista uppgiften) men ange då detta på ett separat blad!

Matematisk statistik

1. a) Ange de tre sannolikhetsaxiomen. **(1p)**
b) Visa med hjälp av sannolikhetsaxiomen att $\Pr(A^c) = 1 - \Pr(A)$. **(1.5p)**
c) Visa med hjälp av sannolikhetsaxiomen att $\Pr(A^c \cup B^c) = 1 - \Pr(A \cap B)$. **(1.5p)**
Notera att i boken används $\bar{A}$ istället för A^c .
2. Ett varuparti om 100 enheter innehåller 6 defekta enheter. En köpare tar ut 5 enheter på måfå, utan återläggning, och undersöker dessa.
a) Vad är sannolikheten att exakt 2 av dessa är defekta? **(2p)**
b) Köparen accepterar partiet om högst en enhet i hans urval är defekt. Vad är sannolikheten för detta? **(2p)**
3. Antalet kunder som i ett viss tidsintervall anländer till ett affär är en stokastisk variabel X . Antar att antalet kunder som anländer i tidsintervallen är 4 i snitt. Bestäm en lämplig fördelning (distribution) för X och beräkna sannolikheten att
a) fler än 2 kunder anländer **(1p)**
b) färre än 5 kunder anländer **(1p)**
c) precis 2 kunder anländer **(1p)**
d) 2 eller fler, men färre än 5 kunder anländer **(1p)**
4. Antar att $X_1, X_2, \dots, X_5$ är oberoende och $N(0, 1)$ -fördelad. Låt $Y = \sum_{i=1}^5 X_i^2$.
a) Ange $E[Y]$. **(1p)**
b) Ange $\text{Var}(Y)$. **(1p)**
c) Beräkna det mest sannolika värdet av Y . **(2p)**

Du behöver inte beräkna fördelningen av Y eller väntevärdet (expected value) självt för a) och b), ange bara resultatet.

5. Den stokastiska variabeln X är Rayleigh-fördelad. Dess täthetsfunktion (density function) är alltså

$$f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \geq 0$$

och väntevärdet och variansen är

$$E[X] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma, \quad \text{Var}(X) = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma^2$$

Anta att man har ett stickprov (sample) $X_1, X_2, \dots, X_n$ från denna fördelning.

- a) Beräkna maximum likelihood-skattningen av σ^2 . **(2p)**
- b) Bestäm om maximum likelihood-skattaren är väntevärdesriktig (unbiased). **(2p)**
6. En viss typ av glödlampa har en lystid X (enhet: timmar) där $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Täthetsfunktionen respektive fördelningsfunktionen är alltså

$$f_X(x) = \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \quad \text{och} \quad F_X(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right), \quad x \geq 0$$

Tillverkaren påstår att $\lambda = 1000$. Per betvivlar att λ är så stort. Han tänker prova nollhypotesen $H_0 : \lambda = 1000$ vs $H_1 : \lambda < 1000$ genom att köpa en lampa och bestäma dess lystid X_1 . Om X_1 är litet, säg $X_1 < a$, tänker han förkasta H_0 . För att bestämma a löser han, för $\lambda = 1000$, ekvationen $\Pr(X < a) = \alpha$, där α är den valda signifikansnivån.

- a) Bestäm a som funktion av α . **(1.5p)**
- b) Anta att Per får $X_1 = 75$. Är detta resultat signifikant på 5%-nivån? **(1.5p)**
- c) Anta istället att Per får $X_1 = 50$. Är detta resultat signifikant på 5%-nivån? **(1.5p)**
- d) Anta nu att $X_1 = 45$ och beräkna p -värdet. Förkastar vi nollhypotesen? **(1.5p)**
7. För att undersöka hur temperaturen förändras ju längre norrut i Sverige man kommer, mättes årsmedeltemperaturen år 2004 i 11 svenska orter. Temperaturerna återges i följande tabell tillsammans med orternas latituder och några statistiker.

Ort	Latitud (x)	Medeltemperatur (y)
Jokkmokk	66.6	-0.6
Umeå	63.5	4.0
Östersund	63.1	4.2
Gävle	60.4	5.8
Karlstad	59.2	7.0
Stockholm	59.3	7.6
Göteborg	57.8	7.7
Jönköping	57.4	6.0
Visby	57.6	7.6
Kalmar	56.7	7.5
Lund	55.7	8.5

$$\begin{aligned} \sum_i x_i &= 657.3 & \sum_i y_i &= 65.3 \\ \sum_i x_i^2 &= 39389.5 & \sum_i y_i^2 &= 455.95 \\ \sum_i x_i y_i &= 3820.4 \end{aligned}$$

- a) Beskriv i ekvationer en lämplig linjär regressionsmodell. **(1p)**
- b) Skatta samtliga parametrar i modellen. **(1.5p)**
- c) Testa på signifikansnivå $\alpha = 0.05$ huruvida årsmedeltemperaturen 2004 sjunker ju längre norrut man kommer. Vilka antaganden krävs för testet? **(1.5p)**

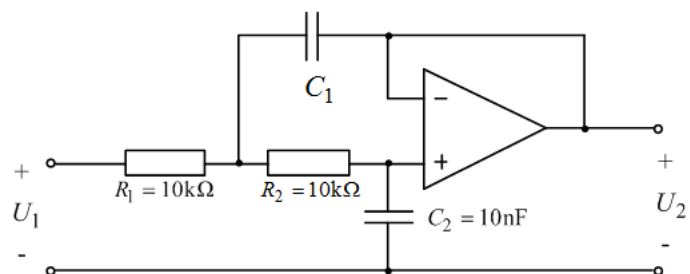
Signalbehandling

8. a) Bestäm Q-värdet för ett 6:e ordningens Butterworth-filter. **(1p)**
- b) Ett notch-filter med samplingsfrekvensen 1500 Hz har överföringsfunktionen

$$H(s) = 0.9072 \frac{z^2 - 0.6180z + 1}{z^2 - 0.5562z + 0.81}$$

Vilken frekvens släcks ut av filtret? **(2p)**

- c) Bestäm kapacitansen C_1 så att nedanstående 2:a-gradslänk får Q-värdet 2. Skissa grafen för filtrets amplitudfunktion. **(2p)**



Figur 1

$$H(s) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}{s^2 + s \frac{C_2 (R_1 + R_2)}{R_1 R_2 C_1 C_2} + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$