

# ESS011: Matematisk statistik och signalbehandling

Tid: 8:30-12:30, Datum: 2011-08-23

**Examinatorer:** José Sánchez och Bill Karlström

**Jour:** Bill Karlström, tel. 070-624 44 88. José Sánchez, tel. 031-772 53 77.

**Hjälpmedel:** Utdelad formelsamling, Formelsamling "Beta", Räknedosa.

**Betygsgränser:** För betyg 3 krävs 14 poäng, för betyg 4 krävs 21 poäng, för betyg 5 krävs 28 poäng, max. 35 poäng.

Fullständig och välmotiverad lösning på uppgift krävs för att full poäng skall erhållas.

Om du redan är godkänd på signalbehandlingsdelen från tidigare år kan du hoppa över signalbehandlingsuppgiften (sista uppgiften) men ange då detta på ett separat blad!

---

## Matematisk statistik

1. Tre mätinstrument som betecknas 1, 2 och 3 fungerar med sannolikhet 0.9, 0.8 resp 0.4. Man väljer slumpmässigt ut ett instrument.
  - a) Hur stor är sannolikheten att det valda instrument fungerar? **(2p)**
  - b) Antag att det instrument man valt visar sig fungera. Beräkna, för  $k=1, 2, 3$ , den betingande sannolikheten att man har valt instrument nr  $k$ . **(2p)**
2. Till en busshållplats anländer bussar med 10 minuters intervall. Vi tänker oss att den tid bussen står still vid hållplatsen är försumbar. En man som inte har tillgång till bussarnas tidtabell anländer slumpmässigt till hållplatsen. Hans väntetid kan anses vara en stokastisk variabel  $X$ .
  - a) Vilka värden kan  $X$  anta? **(2p)**
  - b) Skriv ner täthetsfunktionen för  $X$  och beräkna  $\Pr(3.5 < X \leq 7)$ . **(2p)**
  - c) Bestäm fördelningsfunktionen för  $X$  och rita upp den. **(2p)**
3. Den kontinuerliga stokastiska variabeln  $X$  har täthetsfunktion  $f(x) = \theta(1+x)^{(-\theta-1)}$  för  $x \geq 0$ . Det är känt att parametern  $\theta$  är antingen 2, 3 eller 4. Man har ett slumpmässigt stickprov från denna fördelning omfattande två värden, 0.2 och 0.8.
  - a) Ange likelihood-funktionens värden för de tre möjliga  $\theta$ -värdena. **(1p)**
  - b) Ange maximum likelihoodsuppskattningen av  $\theta$ . **(1p)**
  - c) Beräkna  $\mathbb{E}(X)$  som funktion av  $\theta$ . **(1p)**
  - d) Bestäm moment metodsupskattningen av  $\theta$ . **(1p)**
4. Beräkna täthetsfunktionen för  $Z = X+Y$  om  $X$  och  $Y$  är oberoende och har täthetsfunktionerna

$$f_X(x) = e^{-x} \quad \text{om } x \geq 0 \quad \text{och}$$

$$f_Y(y) = 1 \quad \text{om } 0 \leq y \leq 1.$$

Ledning: Skilj på fallen  $0 \leq z \leq 1$  och  $z \geq 1$  när faltningsformeln (*convolution*)

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

tillämpas. **(3p)**

5. En lösning har det okända pH-värde  $m$ . Man har gjort fyra pH-bestämningar, 8.24, 8.18, 8.15 och 8.23 med en pH-mätare som har ett systematisk fel  $\Delta$  samt ett slumpmässigt fel som är  $N(0, \sigma^2)$ . De fyra mätresultaten är alltså ett slumpmässigt stickprov från  $N(m + \Delta, \sigma^2)$ . Vidare är det känt att  $\Delta = 0.1$  och att  $\sigma = 0.05$ .
- Beräkna konfidensintervallet för  $m$  med konfidensgraden 0.99. **(2p)**
  - Anta nu att  $\sigma$  är okänt. Vad blir då det 99%-konfidensintervallet för  $m$ ? **(2p)**
6. En transistor med låg ljudnivå för användning i datorer är under utveckling. De nuvarande transistorerna har en ljudnivå av 2.5 dB. Det påstås att den genomsnittliga ljudnivån hos de nya transistorerna kommer att ligga under 2.5 dB.
- Skriv ner lämpliga noll- och alternativa hypoteser för att verifiera påståendet. **(1p)**
  - Ett urval av 16 transistorer ger  $\bar{x} = 1.8$  med  $s = 0.8$ . Förkastar vi nollhypotesen på signifikansnivå  $\alpha = 0.01$ ? **(1p)**
  - Ange vilka antaganden du har gjort om fördelning av den stokastiska variabeln  $X$ , ljudnivån hos en transistor. **(1p)**
  - Vilka slutsatser kan dras om ljudnivån hos de nya transistorerna? Vad innebär ett Typ I-fel i detta sammanhang? **(1p)**

7. Kontakter som används i datorer utsätts samtidigt för många stressfaktorer såsom hög temperatur och mekanisk stress. En undersökning genomförs för att undersöka sambandet mellan lutning och kontaktlängd. Dessa data erhålls:

| Kontaktlängd ( $x$ tum) | Lutning ( $y$ millimeter) |
|-------------------------|---------------------------|
| 0.150                   | 3.81                      |
| 0.100                   | 2.54                      |
| 0.098                   | 2.50                      |
| 0.079                   | 2.00                      |
| 0.050                   | 1.27                      |
| 0.040                   | 1.02                      |
| 0.039                   | 1.00                      |
| 0.032                   | 0.80                      |
| 0.020                   | 0.50                      |
| 0.016                   | 0.40                      |
| 0.010                   | 0.25                      |
| 0.005                   | 0.13                      |

- Skatta regressionslinjens parametrar  $\beta_0$  och  $\beta_1$ . **(1p)**
- Beräkna residualerna och visa att de, bortsett från avrundningsfel, summerar till 0. **(1p)**
- Hur mycket skulle lutningen förändras om kontaktens längd ökar med 0.1 tum? **(0.5p)**
- Skulle det vara rimligt att använda den uppskattade regressionslinjen för att förutsäga lutningen för kontakter av längd 0.175 tum? Förklara. **(0.5p)**
- Testa  $H_0: \beta_1 = 0$  mot  $\beta_1 \neq 0$ . Använd  $\alpha = 0.01$ . **(2p)**

## Signalbehandling

8. a) Hos ett HP Butterworthfilter med undre gränsvinkelfrekvens 100 rad/s skall det dominerande polparet ha  $Q$ -värdet minst 1.5. Vilken ordning skall filtret ha? **(2p)**
- b) Använd bilinjär transform för att bestämma överföringsfunktionen för ett diskret 1:a ordningens LP-filter med övre gränsfrekvens 500 Hz och samplingsfrekvensen 8 kHz. **(3p)**