Tentamen i matematisk statistik för KI2 den 17 april 2009

Uppgift 1: Erik och Magnus tävlar i femkamp på Liseberg. Ett av momenten innebär att de skall kasta prick mot en piltavla. Sedan gammalt vet de att Erik träffar tavlan med sannolikheten 0.4 medan Magnus oberoende av Eriks resultat träffar tavlan med sannolikheten 0.7. De båda vännerna kastar var sin pil mot tavlan samtidigt.

a) Anta att endast en pil träffar tavlan. Vad är sannolikheten att det är Erik som har kastat den?

b) Anta att tavlan träffas av minst en pil. Vad är sannolikheten att det är Eriks pil, som har träffat den?

(6 poäng)

Uppgift 2: I en vägkorsning kan antal bilar som passerar antas vara Poissonfördelat med en genomsnittlig passeringsfrekvens av 5 bilar på 15 minuter.

a) Vad är sannolikheten att det kommer minst 2 bilar till korsningen under en 5-minuters period?

b) Anta att en bil just har passerat korsningen. Beräkna sannolikheten att det tar kortare tid än 2 minuter innan nästa bil kommer.

(6 poäng)

Uppgift 3: Anta att ξ är en kontinuerlig stokastisk variabel med följande frekvensfunktion:

$$f(x) = \begin{cases} C(4x - 2x^2) & \text{för } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$$

a) Bestäm fördelningsfunktionen.

b) Beräkna $P(0.5 < \xi < 1.5)$. (7 poäng)

Uppgift 4: Livslängden har ett visst sorts batteri kan ses som en normalfördelad variabel med väntevärdet 40 timmar och standardavvikelsen 20 timmar. Ett batteri används tills det går sönder varvid det omedelbart byts ut till ett nytt. I en fabrik har man köpt in 25 sådana batterier vars livslängder är oberoende. Beräkna sannolikheten att fabriken har minst 1100 timmars användningstid totalt från dessa batterier.

(6 poäng)

Uppgift 5: 5 personer valdes slumpmässigt ut och fick lungkapaciteten uppmätt före och efter en viss behandling. Följande data erhölls:

person	före	efter	ökning = efter – före
1	2750	2850	
2	2360	2380	
3	2950	2930	
4	2830	2860	
5	2260	2330	

Anta att ökningen är normalfördelad. Bilda ett 95%-igt konfidensintervall för den genomsnittliga ökningen i hela populationen. (6 poäng)

Uppgift 6: I en artikel i ”Industrial and Engineering Chemistry” (1970 pp 60-67) beskrevs en försökssituation fär man använde en 2^{5-2} reducerad försöksplan. Följande faktorer valdes A = kondensationstemperatur, B = mängd av material 1, C = volym hos lösnings-medlet, D = kondensationstid, E = mängd av material 2. De generatorer som användes var D = BC och E = AC. Följande effekter beräknades

$\ell_E = 23.2$ $\ell_{AB} = 15.5$ $\ell_{AD} = 16.9$ $\ell_{BC} = 16.2$ $\ell_{CD} = 23.8$ $\ell_{ACE} = 23.4$
$\ell_{BDE} = 16.8$ $\ell_{ABCDE} = 18.1$

Använd ovanstående information för att bestämma de resterande huvudeffekterna
ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C, och ℓ_D. (7 poäng)

Uppgift 7: En tillverkare av elektroniska komponenter måste ange till en eventuell köpare hur stor andel av de levererade enheterna som förväntas vara defekta. Till en köpare har man angett att 12%. Den grossist som fått denna uppgift vill undersöka om detta är sant. Han väljer därför slumpmässigt ut 100 levererade enheter och kontrollerar dessa. Han noterade då att 17 st var defekta. Använd dessa uppgifter för att testa om fabrikantens påstående kan antas vara riktigt. Använd 1%:s signifikansnivå.
(6 poäng)

Uppgift 8: En undersökning görs för att studera om det finns någon genomsnittlig skillnad i kvalitet mellan 3 olika fabrikat skivbromsar, kallade A, B och C. Kvaliteten mäts i antal 1000-tal mil som bromsarna fungerar tillfredsställande innan de måste bytas ut. Följande resultat erhölls:

A	**B**	**C**
4.7	3.9	5.1
4.0	3.6	5.0
4.6	3.8	4.9

Anta att villkoren för att kunna använda variansanalys är uppfyllda. Använd variansanalys för att avgöra om det finns någon kvalitetsskillnad mellan skivbromsarna.
(6 poäng)

Lösningar till tentamen i matematisk statistik för KI2 17/4-09

Uppgift 1: E = Erik träffar tavlan M = Magnus träffar tavlan

$P(E) = 0.4 \qquad P(M) = 0.7$

a) $P(E \mid \text{precis en träff}) = \dfrac{P(E \cap \text{precis en träff})}{P(\text{precis en träff})} =$

$$= \frac{P(E \cap M^C)}{P(E \cap M^C) + P(E^C \cap M)} = (\text{oberoende}) = \frac{P(E) \cdot P(M^C)}{P(E) \cdot P(M^C) + P(E^C) \cdot P(M)} =$$

$$= \frac{0.4 \cdot 0.3}{0.4 \cdot 0.3 + 0.6 \cdot 0.7} = \frac{2}{9} \approx 0.2222$$

b) $P(E \mid \text{minst en träff}) = \dfrac{P(E \cap \text{minst en träff})}{P(\text{minst en träff})} =$

$$= \frac{P(E)}{1 - P(\text{ingen träff})} = (\text{oberoende}) = \frac{P(E)}{1 - P(E^C) \cdot P(M^C)} =$$

$$= \frac{0.4}{1 - 0.6 \cdot 0.3} = \frac{20}{41} \approx 0.4878$$

Uppgift 2: ξ = antal bilar $\xi = Po(\lambda = 5$ bilar/15 min)

a) Räkna om λ till antal bilar/ 5 minuter. $\lambda = 1.67$ bil/ 5 min

$$P(\xi \geq 2) = 1 - P(\xi \leq 1) = 1 - e^{-1.67} \cdot \left(\frac{1.67^0}{0!} + \frac{1.67^1}{1!}\right) \approx 1 - 0.504 = 0.496$$

b) η = tiden mellan två bilar
Räkna om λ till antal bilar/ minuter. $\lambda = 0.333$ bil/ min
$\eta = Exp(\lambda = 0.333$ bilar/ min)

$$P(\xi < 2) = 1 - e^{-0.333 \cdot 2} \approx 0.483$$

Uppgift 3:

a) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow 2C \int_0^2 (2x - x^2)\,dx = 2C \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 2C\left(4 - \frac{8}{3}\right) = \frac{8C}{3} = 1$$

$C = \dfrac{3}{8}$

fortsättning uppgift 3 på nästa sida

fortsättning uppgift 3

$x \le 0$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0$$

$0 < x < 2$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \frac{3}{4}\int_{0}^{x}(2t-t^2)\,dt = \frac{3}{4}\left[t^2 - \frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{3}{4}\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)$$

$2 \le x$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \frac{3}{4}\int_{0}^{2}(2t-t^2)\,dt + \int_{2}^{x} 0\,dt =$$

$$= 0 + \frac{3}{4}\left[t^2 - \frac{t^3}{3}\right]_0^2 + 0 = \frac{3}{4}\left(2^2 - \frac{2^3}{3}\right) = 1$$

Fördelningsfunktionen:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } x \le 0 \\ \frac{3}{4}\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right) & \text{för } 0 < x < 2 \\ 1 & \text{för } x \ge 2 \end{cases}$$

b) $P(0.5 < \xi < 1.5) = P(\xi < 1.5) - P(\xi < 0.5) =$

$$= \frac{3}{4}\left(1.5^2 - \frac{1.5^3}{3}\right) - \frac{3}{4}\left(0.5^2 - \frac{0.5^3}{3}\right) = 0.6875$$

Uppgift 4: ξ_i = livslängden hos batteri ”i” $E(\xi_i) = 40$ $S(\xi_i) = 20$

η = total livslängd hos 25 batterier där $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{25}$

$E(\eta) = 25\,E(\xi) = 25 \cdot 40 = 1\,000$ $\quad Var(\eta) = 25\,Var(\xi) = 25 \cdot 20^2 = 10\,000$

$$P(\eta > 1100) = 1 - P(\eta < 1100) = 1 - P\left(Z < \frac{1100 - 1000}{\sqrt{10000}}\right) = 1 - P(Z < 1) \approx$$

$\approx 1 - 0.8413 = 0.1587$

Uppgift 5: ξ = före behandling, η = efter behandling

ξ och η antas vara normalfördelade $\Rightarrow$ $d = \eta - \xi$ är $N(\mu_d, \sigma_d)$ där σ_d är okänd.

person	ξ	η	$d = \eta - \xi$	d^2
1	2750	2850	100	10000
2	2360	2380	20	400
3	2950	2930	–20	400
4	2830	2860	30	900
5	2260	2330	70	4900

$$\sum_{i=1}^{5} d_i = 200$$

$$\sum_{i=1}^{5} d_i^2 = 16600$$

$$\bar{d} = \frac{200}{5} = 40 \qquad s = \sqrt{\frac{16600 - \frac{200^2}{5}}{5-1}} \approx 46.37$$

t-fördelning med 4 df $\quad \bar{x} \pm 2.78 \frac{s}{\sqrt{n}} \Rightarrow 40 \pm 2.78 \frac{46.37}{\sqrt{5}} \Rightarrow 40 \pm 57.65$

Uppgift 6: Generatorer: $D = BC$ och $E = AC$

Definierande relationerna: $I_1 = BCD$ $\quad I_2 = ACE$ $\quad I_3 = I_1 \cdot I_2 = B\cancel{C}D \cdot A\cancel{C}E = ABDE$

Effekterna är beräknade till $\ell_E = 23.2$ $\quad \ell_{AB} = 15.5$ $\quad \ell_{AD} = 16.9$ $\quad \ell_{BC} = 16.2$
$\ell_{CD} = 23.8$ $\quad \ell_{ACE} = 23.4$ $\quad \ell_{BDE} = 16.8$ $\quad \ell_{ABCDE} = 18.1$

Vi måste nu finna de effekter som är alias till ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C och ℓ_D.

$A \cdot I_3 = \cancel{A}\cancel{A}BDE = BDE \quad \Rightarrow \quad \ell_A = \ell_{BDE} = 16.8$

$B \cdot I_1 = \cancel{B}\cancel{B}CD = CD \quad \Rightarrow \quad \ell_B = \ell_{CD} = 23.8$

$C \cdot I_3 = CABDE = ABCDE \quad \Rightarrow \quad \ell_C = \ell_{ABCDE} = 18.1$

$D \cdot I_1 = \cancel{D}BC\cancel{D} = BC \quad \Rightarrow \quad \ell_D = \ell_{BC} = 16.2$

Uppgift 7:

Steg 1: H_0: $p = 12\%$

H_1: $p \neq 12\%$

Steg 2: $\alpha = 1\%$ kritiska värden = $\pm\, 2.575$

Steg 3: Välj testvariabeln $Z = \dfrac{\hat{p} - p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}$

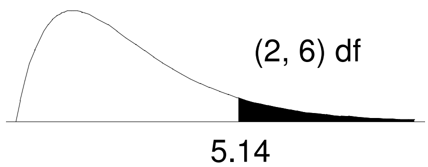
Steg 4: Urval gav $\hat{p} = 17\%$ $n = 100$ $\Rightarrow$ $Z = \dfrac{0.17 - 0.12}{\sqrt{\dfrac{0.12 \cdot 0.88}{100}}} \approx 1.539$

Steg 5; H_0 kan inte förkastas. Denna undersökning motsäger inte tillverkarens påstående.

Uppgift 8:

Steg 1: H_0: $\mu_A = \mu_B = \mu_C$

H_1: Alla ej lika



Steg 2: $\alpha = 0.05$

Steg 3: Testvariabeln : $F = \dfrac{MS_{Bromsar}}{MS_{Okänd}}$

Steg 4 Urvalet gav följande resultat

$$A = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 = 4.7^2 + 4.0^2 + \ldots + 4.9^2 = 176.88$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^{3} (x_i)^2}{3} = \frac{1}{3}\{(4.7+4.0+4.6)^2 + (3.9+3.6+3.8)^2 + (5.1+5.0+4.9)^2\} = 176.5267$$

$$C = \frac{\left(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} x_{ij}\right)^2}{9} = \frac{1}{9}(4.7+4.0+.......+4.9)^2 = 174.24$$

Fortsättning uppgift 8 på nästa sida

Fortsättning uppgift 8

$SS_{Bromsar} = B - C = 2.2867$
$SS_{Okänd} = A - B = 0.3533$
$SS_{totalt} = A - C = 2.64$

ANOVA-tabell

Variationskälla	Kvadratsumma, SS	df	$MS = \frac{SS}{df}$
Bromsar	2.2867	2	2.2867 / 2 = 1.14335
Okänd variation	0.3533	6	0.3533 / 6 = 0.058883
Total	2.64	8	

$$F = \frac{1.14335}{0.058883} = 19.42 > 5.14$$

Steg 5: H_0 förkastas. Undersökningen visar att det är skillnad i bromsarnas kvalitet.