LÖSNINGAR 2014-04-25 LKT325

1 a) $E(\xi) = \sum_{k=0}^{3} k \cdot P(\xi = k) = 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}2 =$
$= \boxed{1{,}7}$

$E(\xi^2) = \sum_{k=0}^{3} k^2 P(\xi = k) = 0^2 \cdot 0{,}2 + 1^2 \cdot 0{,}1 + 2^2 \cdot 0{,}5 + 3^2 \cdot 0{,}2$
$= \boxed{3{,}9}$

$Var(\xi) = E(\xi^2) - (E(\xi))^2 = 3{,}9 - 1{,}7^2 = \boxed{1{,}01}$

b) $P(\xi \le 1) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) = 0{,}2 + 0{,}1 = \boxed{0{,}3}$

c) $P(1 < \xi \le 3) = P(2 \le \xi \le 3) = P(\xi = 2) + P(\xi = 3) = 0{,}5 + 0{,}2 = \boxed{0{,}7}$

2. $P(A\cup B) \underset{\uparrow}{=} P(A)+P(B)-P(A\cap B) \underset{\uparrow}{=} P(A)+P(B)-P(A)P(B) =$

additionssatsen   oberoende

$= 0{,}2+0{,}4-0{,}2\cdot 0{,}4 = 0{,}6-0{,}08 = \boxed{0{,}52}$

---

3 a) $P(1\leq \xi \leq 6) = \int_1^6 \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\,dx = \left[-e^{-\frac{1}{2}x}\right]_1^6 =$

$= -e^{-3}-(-e^{-\frac{1}{2}}) = \boxed{e^{-1/2}-e^{-3}} \approx \boxed{0{,}557}$

b) $E(2\xi-3\eta) = 2E(\xi)-3E(\eta) = 2\cdot 2-3\cdot 3 = 4-9 = \boxed{-5}$

c) $Var(2\xi-3\eta) = Var(2\xi)+Var(-3\eta) = 2^2Var(\xi)+(-3)^2Var(\eta)$

$\underset{\uparrow}{=} 4\cdot 4+9\cdot 9 = 16+81 = \boxed{97}$

$Var(\xi)=4$
$Var(\eta)=9$

d) $P(\xi\geq 3 \mid \xi\geq 2) = \dfrac{P(\{\xi\geq 3\}\cap\{\xi\geq 2\})}{P(\xi\geq 2)} =$

$= \dfrac{P(\xi\geq 3)}{P(\xi\geq 2)} = \dfrac{\int_3^\infty \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\,dx}{\int_2^\infty \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\,dx} = \dfrac{\left[-e^{-\frac{1}{2}x}\right]_3^\infty}{\left[-e^{-\frac{1}{2}x}\right]_2^\infty} = \dfrac{e^{-\frac{3}{2}}}{e^{-1}} =$

$= e^{-3/2+1} = \boxed{e^{-1/2}} \approx \boxed{0{,}607}$

4. Låt ξ_i = antalet bilar i familj nr. i. $(i = 1, 2, \ldots, 50)$

Låt $\eta = \sum_{i=1}^{50} \xi_i$ = totala antalet bilar.

Vet att $\mu = E(\xi_i) = 1{,}4$ och $\sigma = S(\xi_i) = 0{,}3$.

Centrala gränsvärdessatsen $\Longrightarrow$ η är approx $N(50 \cdot 1{,}4, \sqrt{50} \cdot 0{,}3)$

$= N(70, 2.12)$.

$P(\text{parkeringsplatserna räcker}) = P(\eta \leq 75) = P\left(\frac{\eta - 70}{2.12} \leq \frac{75-70}{2.12}\right)$

$\approx \Phi(2{,}36) \approx \boxed{0{,}99}$

5.
a) $\bar{x} = \frac{0{,}83 + 0{,}82 + 0{,}82 + 0{,}84}{4} = 0{,}8275$

$s = \sqrt{\frac{1}{4-1}\left((0{,}83 - 0{,}8275)^2 + (0{,}82 - 0{,}8275)^2 + (0{,}82 - 0{,}8275)^2 + (0{,}84 - 0{,}8275)^2\right)}$

$= \sqrt{0{,}0000917} \approx 0{,}00957$.

Ett 95 % konf-int med σ okänt blir $\begin{pmatrix} \alpha = 0{,}05 \\ n = 4 \\ \nu = 4 - 1 = 3 \end{pmatrix}$

$\bar{x} \pm \frac{t_{0{,}025}(3) \cdot s}{\sqrt{4}} = 0{,}8275 \pm \frac{3{,}18 \cdot 0{,}00957}{\sqrt{4}} =$

$= \boxed{0{,}8275 \pm 0{,}015} = \boxed{[0{,}8125 \, , 0{,}8425]}$

b) Konfidensintervallet är ett utfall av ett slumpmässigt intervall som med sannolikhet 95 % innehåller det verkliga väntevärdet. Eftersom 0,75 ligger utanför intervallet verkar det som att reklamen är falsk.

5 c) En normalfördelad stokastisk variabel kan anta negativa värden. Det kan inte bränsleförbrukningen.

6.) Låt $A = \{ 6\text{:a på alla kasten} \}$

$B_i = \{ \xi = i \} \quad (i = 1, \dots, 6)$

Det gäller att

$$P(A) = \sum_{i=1}^{6} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{6} P(A \mid B_i) P(B_i).$$

Vi vet att $P(B_i) = \frac{1}{6}$.

$P(A \mid B_i) = P(\text{krona på } i \text{ kast då man kastar } i \text{ gånger}) = \frac{1}{2^i}$

$$\Rightarrow P(A) = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} \right) \cdot \frac{1}{6} =$$

$$= \dots = \boxed{\frac{127}{768}} \approx \boxed{0{,}165}$$

---

7 a) $$l_A = \frac{(45+75+52+75)}{4} - \frac{(43+72+51+70)}{4} = \boxed{2{,}75}$$

Teckentabell för BC:

Nr	
1	+
2	+
3	−
4	−
5	−
6	−
7	+
8	+

$$\Rightarrow l_{BC} = \frac{(43+45+70+75)}{4} - \frac{(72+75+51+52)}{4} = \boxed{-4{,}25}$$

7 b)

Styrbjörn: $D = AB \qquad E = BC$

$\Rightarrow \quad I_1 = ABD \qquad I_2 = EBC$

$I_3 = I_1 I_2 = A\cancel{B}DE\cancel{B}C = ACDE$

Alias för C:

$C = CI_1 = \boxed{ABCD}$

$C = CI_2 = \cancel{C}EB\cancel{C} = \boxed{BE}$

$C = CI_3 = \cancel{C}A\cancel{C}DE = \boxed{ADE}$

Gerd: $D = AC \qquad E = AB$

$\Rightarrow \quad I_1 = ACD \qquad I_2 = ABE \qquad I_3 = I_1 I_2 = \cancel{A}CD\cancel{A}BE = BCDE$

Alias för C: $C = CI_1 = \cancel{C}A\cancel{C}D = \boxed{AD}$

$C = CI_2 = CABE = \boxed{ABCE}$

$C = CI_3 = CBCDE = \boxed{BDE}$

c) Med Gerds val är AD alias till C, så de blandas samman. Verkar som att Styrbjörns val är att föredra.

Lösningsförslag

Uppgift 8

a) Vi gör ett t-test eftersom den sanna standardavvikelsen σ är okänd. Vi gör beräkningarna med stickprovsstandardavvikelsen s.

Steg 1
$H_0 : \mu \leq 100$
$H_1 : \mu > 100$
Steg 2
Signifikansnivå $\alpha = 0.1$
Steg 3
Vi har normalfördelad data med okänd standardavvikelse: vi gör ett t-test.
Testvariabel $t = (\bar{(x)} - \mu)/(s/\sqrt{n})$. Vår teststatistika, t, är standardnormalfördelad ($N(0,1)$) under H_0.
Steg 4
$z = (116 - 100)/(80/\sqrt{72}) = 1.697$
Steg 5
Jämför vårt $t = 1.697$ med $t_{\alpha=0.1,\nu=71} = 1.30$ (tabellen visar endast en rad för $\nu = 60$ och $\nu = 120$. Raden med $\nu = 60$ är vald här). Vårt $t > t_{\alpha,\nu=71}$ så vi förkastar H_0. Testet styrker på nivån 0.1 att cyanidnivån i jordmånen är högre än 100 mg/kg.

b) Tabellerna som finns till förfogande är inte detaljerade nog att ge ett exakt p-värde, men teststatistikans värde ligger mycket nära värdet för $t_{\alpha=0.05,\nu=60}$, vilket kan användas som utgångspunkt för diskussionen. Kontentan är att testets p-värde indikerar att vi inte hade kunnat förkasta H_0 på signifikansnivån 0.01, men förmodligen gör det på nivån 0.05.

Uppgift 9

Försöket består av tre mätningar från vardera av $k = 3$ olika grupper. Utifrån beskrivningen inses att det är en envägs ANOVA som genomförs. Nollhypotesen för ANOVA är:

H_0: alla μ_i lika

H_a: alla μ_i ej lika

De grundförutsättningar som krävs för ANOVA är följande:
1. Urvalen från de k olika grupperna är oberoende.
2. Observationerna är normalfördelade, eventuellt med olika medelvärden men med lika varianser.

Vi ser inget i uppgiftsbeskrivningen som antyder att något av villkoren inte är uppfyllda.

Tabellen fylls i enligt följande:
Nollhypotesen testas genom att jämföra det F_0 som beräknats i tabellen ($F_0 = \frac{MS_{ducktillverkare}}{MS_{okand}} = 19.42$) med ett kritiskt värde från F-fördelningen, $F^{\alpha=0.05}_{\nu_1=2,\nu_2=6} = 5.14$. Eftersom vårt framräknade F_0 är större än $F^{\alpha}_{\nu_1,\nu_2}$ förkastar vi H_0. Det

Variationskälla	SS	df	MS	F_0
Däcktillverkare	2.2867	2	1.14335	19.42
Okänd	0.3533	6	0.058883	
Total	2.64	8		

förefaller således finnas en skillnad på livslängden för de olika däcktillverkarnas däck.