LKT325 2014-08-28

1. Låt ξ = flygtiden.

ξ är $\approx N(13{,}75,\ 0.42)$

a) $P(\xi \le 14) = P\Big(\underbrace{\frac{\xi-13{,}75}{0{,}42}}_{\sim N(0,1)} \le \underbrace{\frac{14-13{,}75}{0{,}42}}_{\approx 0{,}60}\Big)$

$\approx \Phi(0{,}6) \underset{\text{tabell}}{\approx} \boxed{0{,}73}$

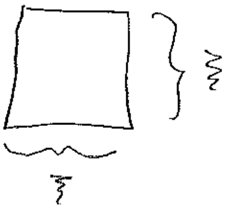
b) $P(\xi > 12{,}92) = 1 - P(\xi \le 12{,}92) = 1 - P\left(\frac{\xi-13{,}75}{0{,}42} \le \frac{12{,}92-13{,}75}{0{,}42}\right)$

$= 1 - \Phi(-1{,}98) = 1-(1-\Phi(1{,}98)) = \Phi(1{,}98) \underset{\text{tabell}}{\approx} \boxed{0{,}98}$

---

2. $\xi \sim R(0,1)$.

A = Arean = ξ^2



a) $P(A > 0{,}5) = P(\xi^2 > 0{,}5) = P(\xi > \sqrt{0{,}5}) = \int_{\sqrt{0.5}}^{1} 1\,dx =$

$= [x]_{\sqrt{0.5}}^{1} = 1 - \sqrt{0.5} \approx \boxed{0{,}29}$

b) $F(x) = P(A \le x) = P(\xi^2 \le x) = P(\xi \le \sqrt{x}) = \int_0^{\sqrt{x}} dt = [t]_0^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$

$f(x) = F'(x) = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{för} \quad 0 \le x \le 1}$

$\boxed{f(x) = 0 \quad \text{om} \quad x < 0 \text{ eller } x > 1.}$

3. ξ har täthet $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{24} & \text{då } 1 \le x \le 7 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

a. $P(1 \le \xi \le 6) = \int_1^6 f(x)\,dx = \int_1^6 \frac{2x}{24}\,dx = \left[\frac{x^2}{48}\right]_1^6 =$

$= \frac{36}{48} - \frac{1}{48} = \boxed{\frac{35}{48} \approx 0.73}$

b. $E(2\xi+1) = 2E(\xi) + 1.$

$E(\xi) = \int_1^7 x \cdot \frac{x}{24}\,dx = \int_1^7 \frac{x^2}{24}\,dx = \left[\frac{x^3}{72}\right]_1^7 = \frac{343-1}{72} = \boxed{\frac{342}{72} \approx 4.76}$

$E(2\xi+1) = 2 \cdot \frac{342}{72} + 1 = \boxed{\frac{379}{36} \approx 10.53}$

c. $Var(\xi) = E(\xi^2) - (E(\xi))^2$

$E(\xi^2) = \int_1^7 x^2 \cdot \frac{x}{24}\,dx = \int_1^7 \frac{x^3}{24}\,dx = \left[\frac{x^4}{96}\right]_1^7 = \frac{2401-1}{96} = \frac{2400}{96} = 25$

$Var(\xi) = 25 - \left(\frac{342}{72}\right)^2 = \boxed{\frac{39}{16} \approx 2.44}$

d. $P(1 \le \xi \le 3 \mid 1 \le \xi \le 6) = \frac{P(\{1 \le \xi \le 3\} \cap \{1 \le \xi \le 6\})}{P(1 \le \xi \le 6)} =$

$\frac{P(1 \le \xi \le 3)}{P(1 \le \xi \le 6)}$. $\quad P(1 \le \xi \le 3) = \int_1^3 \frac{x}{24}\,dx = \left[\frac{x^2}{48}\right]_1^3 = \frac{9-1}{48} = \frac{8}{48} = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow P(1 \le \xi \le 3 \mid 1 \le \xi \le 6) = \frac{1/6}{35/48} = \boxed{\frac{8}{35} \approx 0.23}$

4.) Låt ξ = antalet hjortar under en dag.

a) ξ är $Po(3)$. DVS: $P(\xi = x) = \frac{e^{-3} 3^x}{x!}$ då $x = 0, 1, 2, \ldots$

$$P(\xi = 0) = \frac{e^{-3} 3^0}{0!} = \boxed{e^{-3}} \approx 0{,}05$$

b) Låt ξ_i = antalet hjortar under dag i.

Låt T = totala antalet hjortar under 100 dagar.

Då är $T = \sum_{i=1}^{100} \xi_i$.

Vi har $E(\xi_i) = 3$ och $S(\xi_i) = \sqrt{3}$ enligt regler för Poissonfördelningen.

Enligt centrala gränsvärdessatsen gäller ~~att~~

T är approx $N(3 \cdot 100, \sqrt{3} \cdot \sqrt{100}) = N(300, 10 \cdot \sqrt{3})$

$$P(T > 320) = 1 - P(T \leq 320) = 1 - P\Big(\underbrace{\frac{T-300}{10\sqrt{3}}}_{\approx N(0,1)} \leq \underbrace{\frac{320-300}{10\sqrt{3}}}_{\approx 1{,}15}\Big)$$

$$\approx 1 - \Phi(1{,}15) \approx 1 - 0{,}8749 = \boxed{0{,}1251}$$

5.) Vet att $P(A)=0{,}91$, $P(B)=0{,}92$, $P(A\cap B)=0{,}89$

a) För oberoende gäller: $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

Här har vi $P(A)\cdot P(B)=0{,}8372\neq 0{,}89=P(A\cap B)$.

Alltså: A och B är ej oberoende.

b) Händelsen att åtminstone en av A och B fungerar $=A\cup B$.

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}91+0{,}92-0{,}89=\boxed{0{,}94}$

c) Vi söker $P(A|B)$.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0{,}89}{0{,}92}\approx\boxed{0{,}97}$$

6.) Ett ensidigt 95% konfidensintervall för standardavvikelsen σ ges av

a) $\left[0, \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0,95}}}\right]$ där $n=$ antalet mätningar och s är stickprovsstandardavvikelsen.

Här är $n=4$. Vi har $\bar{x}=\frac{20{,}1+20{,}3+19{,}6+20{,}9}{4}\approx 20{,}225$

$$s=\sqrt{\frac{1}{4-1}\left((20{,}1-\bar{x})^2+(20{,}3-\bar{x})^2+(19{,}6-\bar{x})^2+(20{,}9-\bar{x})^2\right)}$$

$=\ldots=0{,}537742$. $\chi^2_{0,95}=0{,}3518$

antalet frihetsgrader $=4-1=3$
se χ^2-tabell

forts/ Så intervallet blir

$$\left[0,\ \frac{\sqrt{3}\cdot 0{,}5337}{\sqrt{0{,}3518}}\right] = \boxed{[0,\ 1{,}56]}.$$

b) Eftersom 0,7 ligger i detta intervall kan vi inte utesluta att standardavvikelsen är högre än 0.7. Vi gör alltså bäst i att undersöka maskinen.

7.)

a)

$$l_B = \frac{(y_3+y_4+y_7+y_8)}{4} - \frac{(y_1+y_2+y_5+y_6)}{4} =$$

$$= \frac{73+77+71+75}{4} - \frac{(41+42+50+55)}{4} = \boxed{27}$$

Teckentabell för AB:

+
−
−
+
+
−
−
+

$$l_{AB} = \frac{(y_1+y_4+y_5+y_8)}{4} - \frac{(y_2+y_3+y_6+y_7)}{4}$$

$$= \frac{(41+77+50+75)}{4} - \frac{(42+73+55+71)}{4} = \boxed{0{,}5}$$

b) Sigvard: $D = AB$ $E = BC$

$I_1 = ABD$ $I_2 = BCE$ $I_3 = I_1 I_2 = A\cancel{B}D\cancel{B}CE = ACDE$

Alias för C: $C = CI_1 = \boxed{ABCD}$ $C = CI_2 = \cancel{C}B\cancel{C}E = \boxed{BE}$

$C = CI_3 = CACDE = \boxed{ADE}$

Sigrid: $D = AC$ $E = AB$. $I_1 = ACD$ $I_2 = ABE$

$I_3 = I_1 I_2 = \cancel{A}CD\cancel{A}BE = BCDE$.

Alias för C: $C = CI_1 = \cancel{C}A\cancel{C}D = \boxed{AD}$ $C = CI_2 = \boxed{ABCE}$

$C = CI_3 = CBCDE = \boxed{BDE}$

7c) Sigvard: C sammanblandas med ABCD, BE och ADE

Sigrid: C sammanblandas med AD, ABCE och BDE

Vi ser att C sammanblandas med AD med Sigrids val av generatorer men inte med Sigvards.
Alltså är Sigvards val av generatorer att föredra.

Lösningsförslag

Uppgift 8

a) Eftersom vi ombeds beräkna en populationsproportion (som egentligen är binomialfördelad) och vårt stickprov är stort (dvs. över 30) kan vi med stöd i centrala gränsvärdessatsen approximera populationsproportionens fördelning med en normalfördelning med väntevärde, p, och standardavvikelse, $\sqrt{p(1-p)/n}$.

Följande hypotestest kan användas för att undersöka om företaget fortfarande har majoritet på marknaden:

Hypoteser

$H_0 : p = 0.73$

$H_1 : p \neq 0.73$

Testvariabel (teststatistika)

$z = \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$

Låt $\hat{p}$ beteckna den observerade marknadsandelen. Då är vår teststatistika, z, standardnormalfördelad ($N(0,1)$) under H_0.

b) p-värdet beräknas utifrån teststatistikan, med $\hat{p} = \frac{243}{344} = 0.674$:

$z = \frac{0.674-0.73}{\sqrt{\frac{0.73(1-0.73)}{344}}} = -2.33950$

Med hjälp av normalfördelningstabellen kan vi nu ta fram p-värdet för $z = -2.34$ (tänk på att tabellen i Dahlboms bok inte visar värden för $z < 0$ så ta komplementet av värdet $z = 2.34$):

$p = 2 \cdot P(z < -2.34) = 2 \cdot 0.0096 = 0.0192$

Utifrån ett p-värde på 0.0192 kan vi på 1% signifikansnivå EJ förkasta H_0. Det går dock att förkasta nollhypotesen vid en signifikansnivå på 5%. Vad företagets marknadsavdelning väljer att använda för signifikansnivå lämnar vi osagt.